ステップ１　言葉のお勉強

1　ある整数を素数の積で表すことを「素因数分解」といいます。例えば、12を素因数分解すると、12＝２×２×３です。

また、素因数分解の式に出てくる素数を、「素因数」と言います。例えば、12＝２×２×３なので、<u>12の素因数は２と３</u>となります。<u>12には、素因数２が２個、素因数３が１個含まれています</u>。

以上を参考に、次の（　　）にあてはまる数を求めなさい。

(1)　８は、８＝（　　　）×（　　　）×（　　　）なので、８の素因数は（　　　）です。

８には、素因数（　　　）が（　　　）個含まれています。

(2)　18は、18＝（　　　）×（　　　）×（　　　）なので、18の素因数は（　　　）と（　　　）です。

18には、素因数（　　　）が（　　　）個、素因数（　　　）が（　　　）個含まれています。

2　同じ数字を何回かかけ合わせることを「累乗（るいじょう）」といいます。

累乗のうち、同じ数を２回かけ合わせることを「２乗（じょう）」、３回かけ合わせることを「３乗」、４回なら「４乗」、・・・、といいます。例えば、２の２乗は、２×２＝４、３の３乗は、３×３×３＝27です。

※２乗は「自乗（じじょう）」や「平方（へいほう）」、３乗は「立法（りっぽう）」ともいいます。

また、２の２乗は「2^2」、３の３乗は「3^3」のように表し、それぞれ、「２の２乗（じょう）」、「３の３乗（じょう）」と読みます。このとき、右上の小さい数を「指数（しすう）」と呼びます。

以上を参考に、次の（　　）にあてはまる数を求めなさい。

(1)　3^2 ＝（　　　）×（　　　）＝（　　　）

(2)　2^3 ＝（　　　）×（　　　）×（　　　）＝（　　　）

(3)　5^3 ＝（　　　）×（　　　）×（　　　）＝（　　　）

ステップ２　素因数が１個

3　８の約数の個数について考えます。

(1)　８の約数は小さい方から、

（　　）、（　　）、（　　）、（　　）の（　　）個です。

(2)　８を素因数分解すると、

８＝（　）×（　）×（　）＝（　）$^{(\ )}$です。

(3)　８の約数のうち、１以外の約数を素因数分解すると、小さい方から、

２　＝　2^1

（　　）＝（　）×（　）＝（　）$^{(\ )}$

（　　）＝（　）×（　）×（　）＝（　）$^{(\ )}$です。

(4)　(1)～(3)の結果について考えます。

①　８＝（　）$^{(ア)}$です。

②　８に含まれる素因数は（　）だけです。

③　８の約数は、１と、（　）の（　）乗～（ア　）乗です。

④　よって、８の約数の個数は、

（ア　　）＋（　　）＝（　　）個と、求められます。

4　次の問いに答えなさい。

(1)　27の約数の個数について考えます。

①　27＝（　　）×（　　）×（　　）＝（　　）$^{(\quad)}$です。

②　27の約数の個数は、（　　）＋（　　）＝（　　）個です。

(2)　125の約数は何個ですか。

(3)　64の約数は何個ですか。

ステップ３　素因数が２個

5　12 の約数の個数と総和について考えます。

(1)　12 の約数は小さい方から、

（　　　）、（　　　）、（　　　）、（　　　）、（　　　）、（　　　）

の（　　　）個です。これらの総和は（　　　）です。

(2)　12 を素因数分解すると、

12＝（　　）×（　　）×（　　）＝（　　）$^{ア（\quad）}$×（　　）$^{イ（\quad）}$

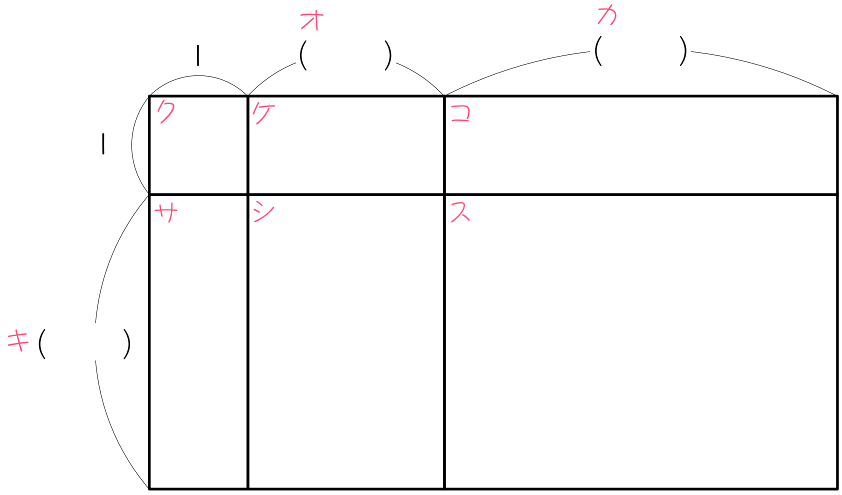
です。（イは普通書きませんが、あとの問題で使うので、ここでは書いておきます。）

(3)　12 の素因数は（ウ　　　）と（エ　　　）です。

(4)　12 の約数のうち、1 と、<u>ウだけを素因数に持つ約数</u>を、小さい方から並べると、1、（オ　　　）、（カ　　　）です。

(5)　12 の約数のうち、1 と、<u>エだけを素因数に持つ約数</u>を、小さい方から並べると、1、（キ　　　）です。

(6)　(4)の数を横の長さ、(5)の数をたての長さにとって、次のページの図のような長方形を作ります。このとき、オ～キの長さと、長方形ク～スの面積を記入しなさい。



(7)　(1)と(6)の結果を比べます。すると、ク～スの長方形の面積が、12 の約数に 1 対 1 に対応しているのが分かります。よって、12 の約数の個数は、ク～スの長方形の個数と等しくなります。よって、

横に　（ア　　　）＋（　　　）＝（　　　）個

たてに（イ　　　）＋（　　　）＝（　　　）個

の長方形が並んでいるので、12 の約数の個数は、

（　　　）×（　　　）＝（　　　）個、となります。

となります。

(8) (7)より、12 の約数の総和は、ク～スの長方形の面積の合計、つまり、全体の長方形の面積と等しいことが分かります。よって、

全体の長方形の横の長さ　＝（　　）＋（　　）＋（　　）＝（　　）

全体の長方形のたての長さ＝（　　）＋（　　）＝（　　）

より、

12 の約数の総和＝（　　　）×（　　　）＝（　　　）

となります。

6

$\boxed{5}$を参考にして、24 の約数の個数と総和を求めようと思います。

(1) 24 を素因数分解すると、

24＝（　　）×（　　）×（　　）×（　　）

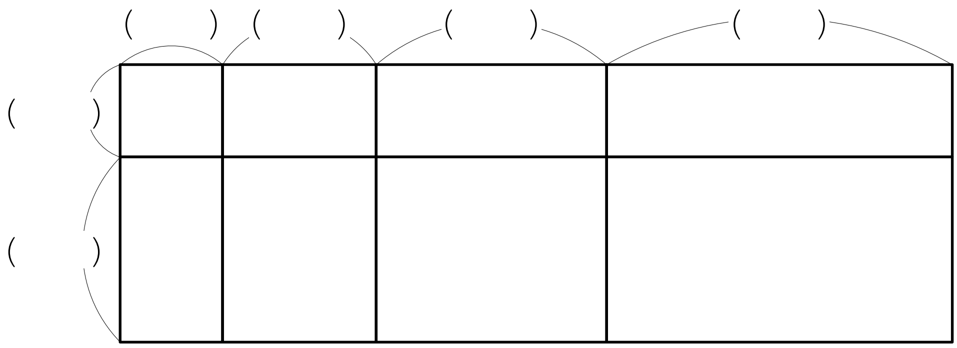
＝（　　）$^{(\quad)}$×（　　）$^{(\quad)}$ です。

(2) 24 の素因数は（ア　　　）と（イ　　　）です。

(3) 24 の約数のうち、1 と、アだけを素因数に持つ約数を、小さい方から並べると、1、（　　　）、（　　　）、（　　　）です。

(4) 24 の約数のうち、1 と、イだけを素因数に持つ約数を、小さい方から並べると、1、（　　　）です。

(5) (3)の数を横の長さ、(4)の数をたての長さにとって、図のような長方形を作ります。（　　）にあてはまる長さを記入しなさい。



(6)　(5)の図より、24 の約数の個数は、

（　　　）×（　　　）＝（　　　）個です。

(7)　(5)の図より、24 の約数の総和は、

横　（　　　）＋（　　　）＋（　　　）＋（　　　）＝（　　　）

たて（　　　）＋（　　　）＝（　　　）

より、

（　　　）×（　　　）＝（　　　）です。

7　72 の約数の個数と総和を、計算で求めなさい。

ステップ４　素因数が３個

8　$\boxed{5}$を参考にして、60 の約数の個数と総和を求めようと思います。

(1)　60 を素因数分解すると、

$60 = (\quad) \times (\quad) \times (\quad) \times (\quad)$

$= (\quad)^{(\ )} \times (\quad)^{(\ )} \times (\quad)^{(\ )}$ です。

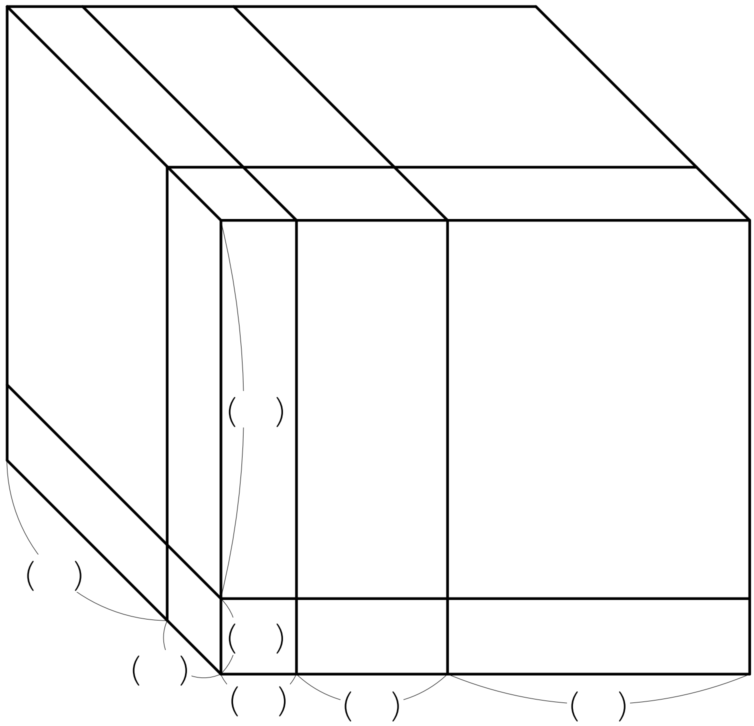
(2)　24 の素因数は（ア　　　）と（イ　　　）と（ウ　　　）です。

(3)　60 の約数のうち、1 と、アだけを素因数に持つ約数を、小さい方から並べると、（　　　）、（　　　）、（　　　）です。

(4)　60 の約数のうち、1 と、イだけを素因数に持つ約数を、小さい方から並べると、（　　　）、（　　　）です。

(5)　60 の約数のうち、1 と、ウだけを素因数に持つ約数を、小さい方から並べると、（　　　）、（　　　）です。

(6)　(3)の数を横の長さ、(4)の数をたての長さ、(5)の数を高さにとって、次のページの図のような直方体を作ります。（　　）にあてはまる長さを記入しなさい。



(7)　図より、60 の約数の個数は、

（　　　）×（　　　）×（　　　）＝（　　　）個です。

(8)　図より、60 の約数の総和は、

横　（　　　）＋（　　　）＋（　　　）＝（　　　）

たて（　　　）＋（　　　）＝（　　　）

高さ（　　　）＋（　　　）＝（　　　）

より、

（　　　）×（　　　）×（　　　）＝（　　　）となります。

※長方形（2 次元）から類推して直方体（3 次元）を使って解くように、低い次元から類推して高い次元の問題を考えることを、「次元を拡張する」といいます。

9 次の数の約数の個数と総和を、計算で求めなさい。

(1) 360

(2) 3000

(3)☆ 2100

■ 解答 ■

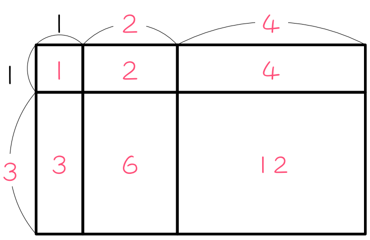
$\boxed{1}$ (1) 2、2、2、
2、
2、3
(2) 2、3、3、
2、3、
2、1、3、
2

$\boxed{2}$ (1) 3、3、9
(2) 2、2、2、8
(3) 5、5、5、125

$\boxed{3}$ (1) 1、2、4、8、4
(2) 2、2、2、2^3
(3) 4、2、2、2^2
8、2、2、2、2^3
(4) ① 2^3
② 2
③ 2、1、3
④ 3、1、4

$\boxed{4}$ (1) ① 3、3、3、3^3
② 3、1、4
(2) 4個
(3) 7個

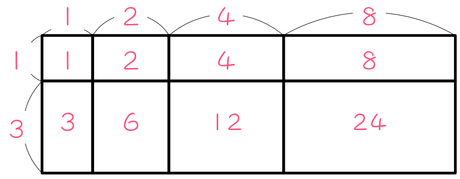
$\boxed{5}$ (1) 1、2、3、4、6、12、
6、28
(2) 2、2、3、2^2、3^1
(3) 2、3
(4) 2、4
(5) 3
(6)



(7) 2、1、3、
1、1、2
3、2、6

(8) 1、2、4、7、
1、3、4、
7、4、28

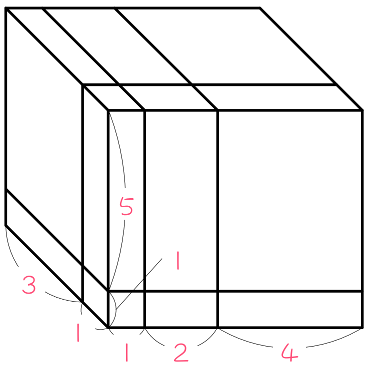
$\boxed{6}$ (1) 2、2、2、3、
2^3、3^1
(2) 2、3
(3) 2、4、8
(4) 3
(5)



(6) 4、2、8
(7) 1、2、4、8、15、
1、3、4、
15、4、60

$\boxed{7}$ 個数：12個　総和：195

$\boxed{8}$ (1) 2、2、3、5、
2^2、3^1、5^1
(2) 2、3、5
(3) 1、2、4
(4) 1、3
(5) 1、5
(6) 右図



(7) 3、2、2、12
(8) 1、2、4、7、
1、3、4、
1、5、6
7、4、6、168

$\boxed{9}$ (1) 個数：24個　総和：1170
(2) 個数：32個　総和：9360
(3) 個数：36個　総和：6944

■ 解説 ■

$\boxed{4}$ (1) $125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$

よって、$3 + 1 = \underline{4\text{個}}$

(2) $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

よって、$6 + 1 = \underline{7\text{個}}$

$\boxed{7}$ $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

個数は、

$(3 + 1) \times (2 + 1) = \underline{12(\text{個})}$

総和は、

$1 + 2 + 4 + 8 = 15$

$1 + 3 + 9 = 13$

$15 \times 13 = \underline{195}$

$\boxed{9}$ (1) $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

個数は、

$(3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1)$

$= \underline{24(\text{個})}$

総和は、

$1 + 2 + 4 + 8 = 15$

$1 + 3 + 9 = 13$

$1 + 5 = 6$

$15 \times 13 \times 6 = \underline{1170}$

(2) $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 2^3 \times 3^1 \times 5^3$

個数は、

$(3 + 1) \times (1 + 1) \times (3 + 1)$

$= \underline{32(\text{個})}$

総和は、

$1 + 2 + 4 + 8 = 15$

$1 + 3 = 4$

$1 + 5 + 25 + 125 = 156$

$15 \times 4 \times 156 = \underline{9360}$

(3) $2100 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$

$= 2^2 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1$

個数は、

$(2 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1)$

$\times (1 + 1) = \underline{36(\text{個})}$

総和は、

$1 + 2 + 4 = 7$

$1 + 3 = 4$

$1 + 5 + 25 = 31$

$1 + 7 = 8$

$7 \times 4 \times 31 \times 8 = \underline{6944}$