ステップ１　言葉のお勉強「～乗」

1 数学では、同じ数を２回かけることを「２乗(じょう)する」といいます。例えば３を２乗すると、３×３＝９となります。このとき、３×３を「3^2」と表し、「３の２乗(じょう)」と読みます。同様にして、

３の３乗　→　$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

３の４乗　→　$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

となります。

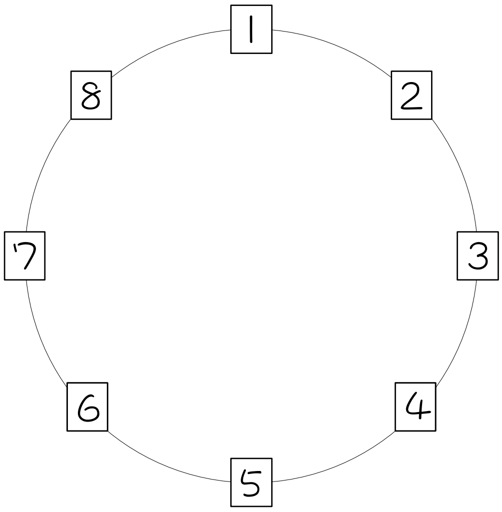
下の表は、２を何乗かした数についてまとめたものです。表の空らんをうめなさい。

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
2	4			

2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}

ステップ２　枚数が２の～乗

2　１から８までの数が書かれた８（＝2^3）枚のカードを、時計回りに数の小さい順に円形に並べ、１のカードから時計回りに１つおきにカードを取りのぞいていきます。



(1)　１周目は、

（　　）、（　　）、（　　）、（　　）

のカードを取るので、

（　　）、（　　）、（　　）、（　　）

の、合計（　　）枚のカードが残ります。

(2)　２周目は、

　　（　　）、（　　）

　　のカードを取るので、

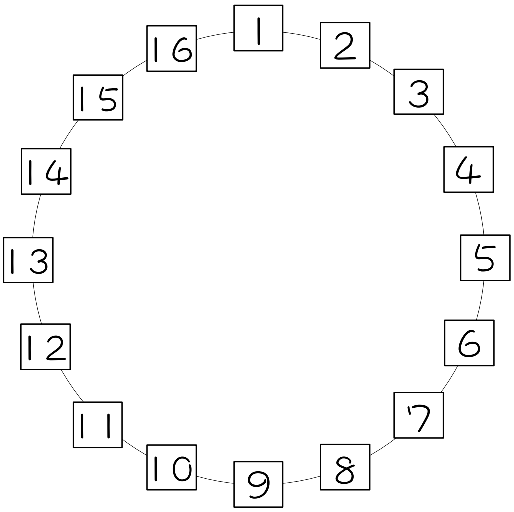
　　（　　）、（　　）

　　の、合計（　　）枚のカードが残ります。

(3)　３周目は、（　　）のカードを取るので、

　　最後に（　　）のカードが残ります。

3　１から16までの数が書かれた16（$=2^4$）枚のカードを、時計回りに数の小さい順に円形に並べ、１のカードから時計回りに１つおきにカードを取りのぞいていきます。



(1)　１周目は、

(　　)、(　　)、(　　)、(　　)、(　　)、(　　)、(　　)、(　　)

のカードを取るので、

(　　)、(　　)、(　　)、(　　)、(　　)、(　　)、(　　)、(　　)

の、合計（　　）枚のカードが残ります。

(2)　２周目は、

（　　）、（　　）、（　　）、（　　）

のカードを取るので、

（　　）、（　　）、（　　）、（　　）

の、合計（　　）枚のカードが残ります。

(3)　３周目は、

（　　）、（　　）

のカードを取るので、

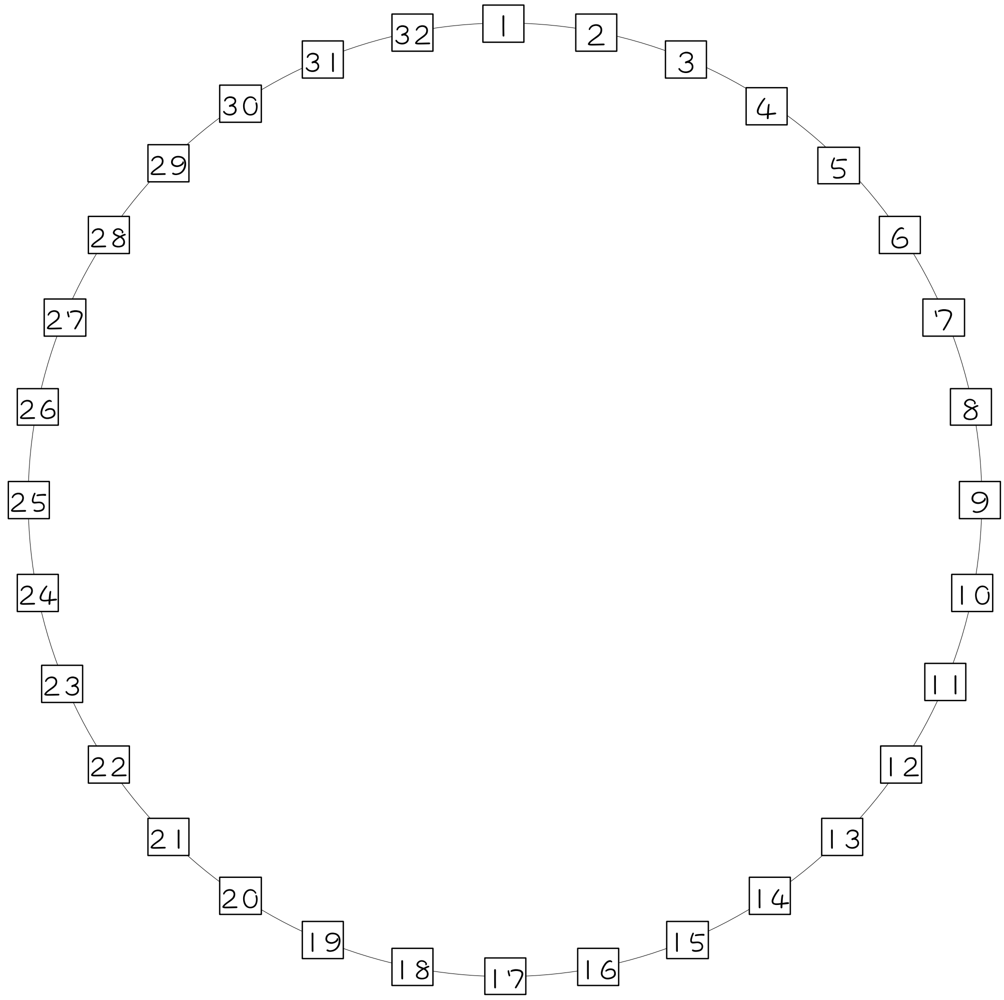
（　　）、（　　）

の、合計（　　）枚のカードが残ります。

(4)　４周目は、（　　）のカードを取るので、

最後に（　　）のカードが残ります。

4　1から 32 までの数が書かれた 32 （$=2^5$） 枚のカードを、時計回りに数の小さい順に円形に並べ、1のカードから時計回りに1つおきにカードを取りのぞいていきます。



(1)　1周目は、

（　　）、（　　）、（　　）、（　　）、（　　）、・・・、（　　）

のカードを取るので、

（　　）、（　　）、（　　）、（　　）、（　　）、・・・、（　　）

の、合計（　　）のカードが残ります。

(2)　２周目は、

（　　）、（　　）、（　　）、（　　）、（　　）、（　　）、（　　）、（　　）

のカードを取るので、

（　　）、（　　）、（　　）、（　　）、（　　）、（　　）、（　　）、（　　）

の、合計（　　）のカードが残ります。

(3)　３周目は、

（　　）、（　　）、（　　）、（　　）

のカードを取るので、

（　　）、（　　）、（　　）、（　　）

の、合計（　　）のカードが残ります。

(4)　４周目は、

（　　）、（　　）

のカードを取るので、

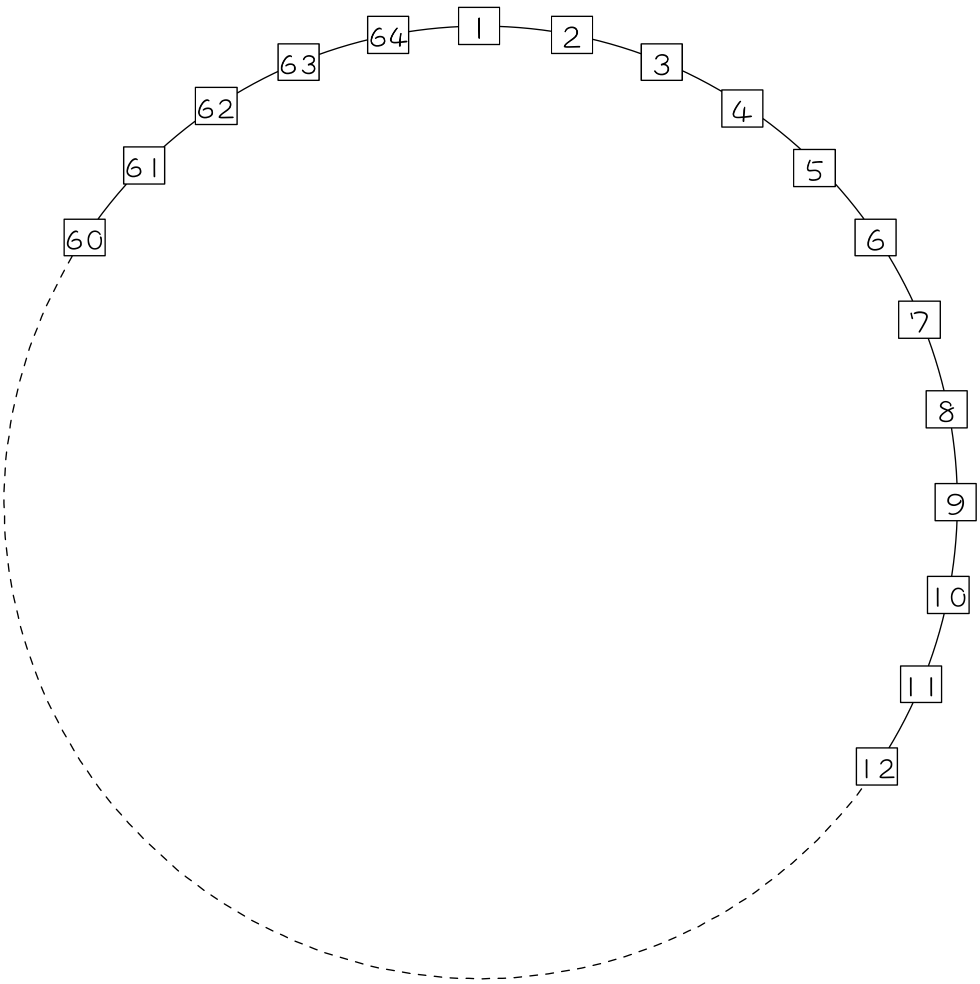
（　　）、（　　）

の、合計（　　）のカードが残ります。

(5)　５周目は、（　　）のカードを取るので、

最後に（　　）のカードが残ります。

5　1から64までの数が書かれた64（＝2^6）枚のカードを、時計回りに数の小さい順に円形に並べます。1のカードから時計回りに1つおきにカードを取りのぞいていくとき、最後に残るカードに書かれた数を求めなさい。1、2、3の結果から予想して答えなさい。



6 1～5の結果についてまとめます。1から2^N（2のN乗）までの数が書かれた2^N枚のカードを、時計回りに数の小さい順に円形に並べ、1のカードから時計回りに1つおきにカードを取りのぞいていきます。

(1) このとき、最後に残るカードは（　　）になります。

(2) (1)の理由について考えます。

① 1周目にカードを取ると、(　　)の倍数のカードが2^{N-1}枚残ります。

② 2周目にカードを取ると、（　　）の倍数のカード2^{N-2}枚残ります。

③ 3周目にカードを取ると、（　　）の倍数のカード2^{N-3}枚残ります。

④ 4周目にカードを取ると、（　　）の倍数のカード2^{N-4}枚残ります。

⑤ 同様に続けていくと、

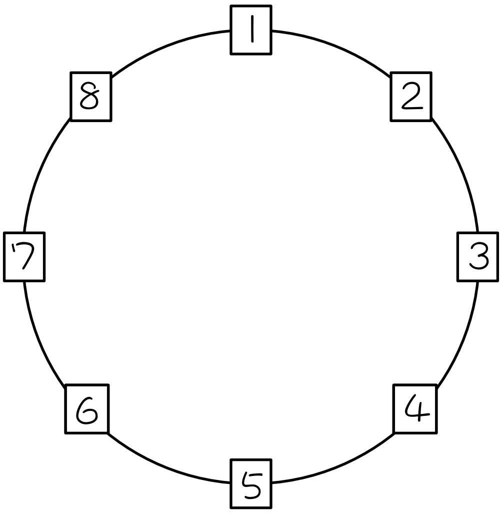
最後の（　　）周目に、（　　）の倍数のカードが1枚残ります。

(3) (1)の結果をカードの位置関係から言うと、最後に残るカードは、はじめに取るカードの（　　）枚【手前・あと】のカードになります。

最小の数

ステップ３　１以外から始める

7　１から８までの数が書かれた８枚のカードを、時計回りに数の小さい順に円形に並べ、カードを１つおきに取りのぞいていきます。



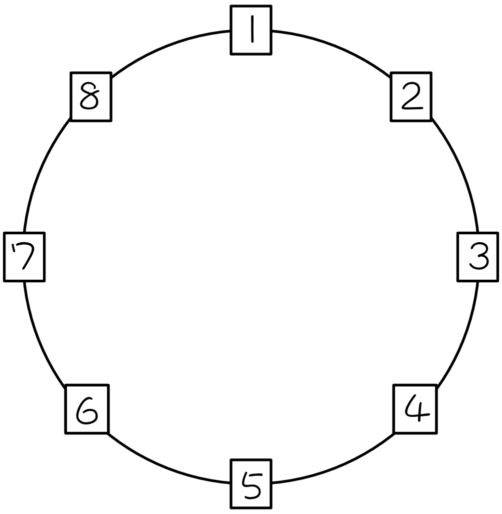
(1)　１のカードから取りのぞくとき、最後に残るカードは（　　）です。

(2)　２のカードから取りのぞくとき、最後に残るカードは（　　）です。

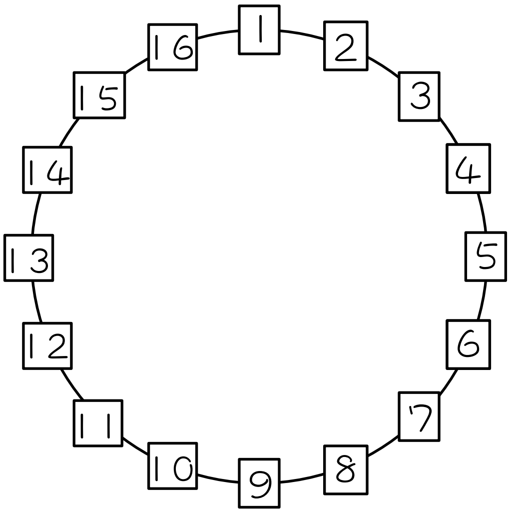
(3)　(1)(2)の結果から考えて、はじめに取るカードと最後に残るカードの関係をまとめると、次のようになります。

はじめに取るカード	1	2	3	4	5	6	7	8
最後に残るカード								

8　１から８までの数が書かれた８枚のカードを、時計回りに数の小さい順に円形に並べます。Xのカードから時計回りに１つおきにカードを取りのぞいていくと、最後に残るカードに書かれた数は６になります。Xにあてはまる数を求めなさい。



9　１から 16 までの数が書かれた 16 枚のカードを、時計回りに数の小さい順に円形に並べ、カードを１つおきに取りのぞいていきます。



(1)　１のカードから取りのぞくとき、最後に残るカードは（　　）です。

(2)　(1)の結果から考えて、

①　はじめに取るカードが７のとき、最後に残るカードは（　　）です。

①　はじめに取るカードが 10 のとき、最後に残るカードは（　　）です。

①　はじめに取るカードが 14 のとき、最後に残るカードは（　　）です。

ステップ4　【復習】～番目の奇数を求める

10　次のように偶数と奇数が並んでいます。

番目	1	2	3	4	5	・・・
偶数	2	4	6	8	10	・・・
奇数	1	3	5	7	9	・・・

(1)　10番目の偶数は、

（　　　）×（　　　）＝（　　　）、

10番目の奇数は、

（　　　）×（　　　）－（　　　）＝（　　　）です。

(2)　27番目の偶数は、

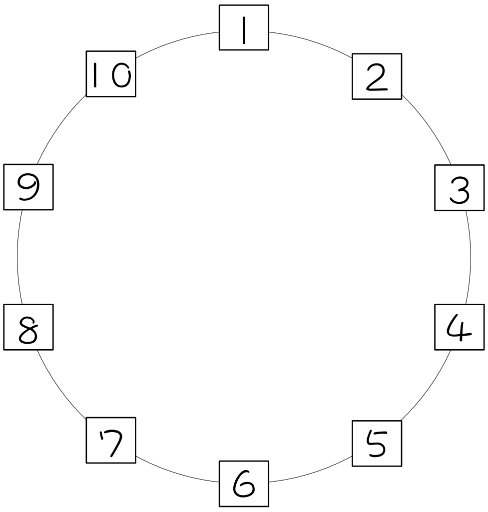
（　　　）×（　　　）＝（　　　）、

27番目の奇数は、

（　　　）×（　　　）－（　　　）＝（　　　）です。

ステップ３　枚数が２のＮ乗でない

11　１から 10 までの数が書かれた 10 枚のカードを、時計回りに数の小さい順に円形に並べます。１のカードから時計回りに１つおきにカードを取りのぞいていくとき、最後に残るカードに書かれた数を求めようと思います。



(1)　２を何乗かした数のうち、10 を超えない最大の数は（　　　）です。

(2)　カードを（　　　）枚取ると、カードの枚数が(1)の数になります。

(3)　いま、カードの枚数が(1)の数になりました。次に取るカードは（　　　）です。

(4)　(3)より、最後に残るカードは（　　　）です。

12 1から40までの数が書かれた40枚のカードを、時計回りに数の小さい順に円形に並べます。1のカードから時計回りに1つおきにカードを取りのぞいていくとき、最後に残るカードに書かれた数を求めなさい。

13　1から100までの数が書かれた100枚のカードを、時計回りに数の小さい順に円形に並べます。1のカードから時計回りに1つおきにカードを取りのぞいていくとき、最後に残るカードに書かれた数を求めなさい。

ステップ4　【発展】よく似た問題

14 次のように1から100の整数が横1列に並んでいます。このように並んだ整数を、先頭から順に1つおきに消していくという作業を数字が1つになるまでくり返します。

1　2　3　4　5　6　7　8　9　10 11　・・・　100

例えば、1回目の作業で消えるのは、1、3、5、7、…、99

2回目の作業で消えるのは、2、6、10、14、…、98

です。次の（　　）に適当な数を入れなさい。

(1)　3回目の作業を終えて消えずに残っている整数の中で、一番小さいものは（　　　）です。

(2)　4回目の作業を終えて消えずに残っている整数すべての和は（　　　）です。

(3)　1番最後に残る整数は（　　　）です。

■ 解答 ■

1

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
2	4	8	16	32

2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
64	128	256	512	1024

2 (1) 1、3、5、7、
2、4、6、8、
4
(2) 2、6、
4、8、
2
(3) 4、8

3 (1) 1、3、5、7、9、11、13、15、
2、4、6、8、10、12、14、16、
8
(2) 2、6、10、14、
4、8、12、16、
4
(3) 4、12、
8、16、
2
(4) 8、16

4 (1) 1、3、5、7、9、・・・、31、
2、4、6、8、10、・・・、32、
16
(2) 2、6、10、14、18、22、26、30、
4、8、12、16、20、24、28、32、
8
(3) 4、12、20、28、
8、16、24、32、
4
(4) 8、24、
16、32、
2
(5) 16、32

5 64

6 (1) 2^N
(2) ① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ N、2^N
(3) 1、手前

7 (1) 8
(2) 1
(3)

はじめ	1	2	3	4	5	6	7	8
最後	8	1	2	3	4	5	6	7

8 7

9 (1) 16
(2) ① 6 ② 9 ③ 13

10 (1) 10、2、20、
10、2、1、19
(2) 27、2、54、
27、2、1、53

11 (1) 8 (2) 2 (3) 5 (4) 4

12 16

13 72

14 (1) 8 (2) 336 (3) 64

■　解説　■

$\boxed{8}$　×の１つ手前が６だから、×＝７

$\boxed{12}$　・２を何乗かした数のうち、40 を超えない最大の数は、

$2^5=32$

・残り 32 枚になるのは、

40－32＝８(枚)取ったとき。

・残り 32 枚になった時点で、最初に取るカードは、１から数えて、

８＋１＝９(番目)の奇数

・１から数えて９番目の奇数は、

９×２－１＝17

・残り 32 枚に時点で、最初に取るカードは 17 だから、最後に残るのは、

17－１＝<u>16</u>

$\boxed{13}$　・２を何乗かした数のうち、100 を超えない最大の数は、

$2^6=64$

・残り 64 枚になるのは、

100－64＝36(枚)取ったとき。

・残り 64 枚になった時点で、最初に取るカードは、１から数えて、

36＋１＝37(番目)の奇数

・１から数えて 37 番目の奇数は、

37×２－１＝73

・残り 64 枚に時点で、最初に取るカードは 73 だから、最後に残るのは、

73－１＝<u>72</u>

$\boxed{14}$　・１回目に消えるのは、

１、３、５、７、…、99

１回目に残るのは、

２、４、６、８、…、100

→２の倍数

・２回目に消えるのは、

２、６、10、14、…、98

２回目に残るのは、

４、８、12、16、…、100

→４の倍数

・３回目に消えるのは、

４、12、20、28、…、100

３回目に残るのは、

８、16、24、32、…、96

→８の倍数

・４回目に消えるのは、

８、24、40、56、72、88

４回目に残るのは、

16、32、48、64、80、96

→16 の倍数

・５回目に消えるのは、

16、48、80

５回目に残るのは、

32、64、96

→32 の倍数

・６回目に消えるのは、

32、96

６回目に残るのは、

64

(1)　上より、<u>８</u>

(2)　(16＋96)×６÷２＝<u>336</u>

(3)　上より、<u>64</u>