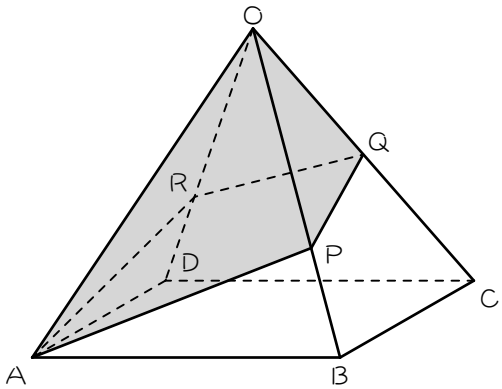
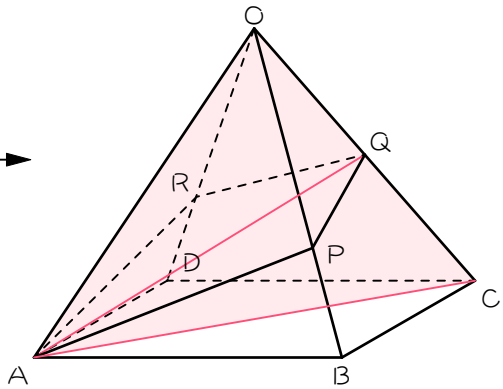
ステップ１

１ 図１のように、底面が正方形の四角すいＯＡＢＣＤを、３点Ｐ、Ｑ、Ｒを通る平面で切断しました。ＯＰ：ＰＢ＝ＯＲ：ＲＤ＝２：１、ＯＱ：ＱＣ＝１：１のとき、切り口より上の立体ＯＡＰＱＲの体積が四角すいＯＡＢＣＤの何倍になるかを求めようと思います。

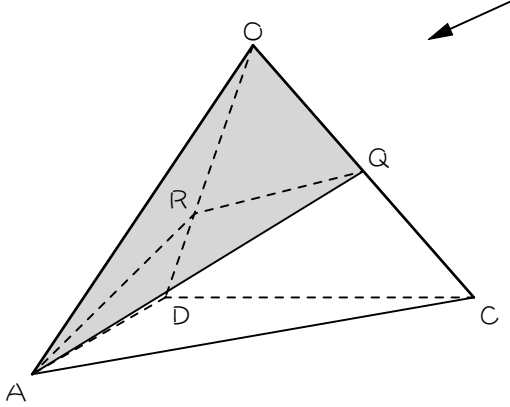
このままでは体積を比べられないので、図２のように四角すいＯＡＢＣＤを面ＯＡＣで切断し、図３と図４のように２つの三角すいに分けて考えます。



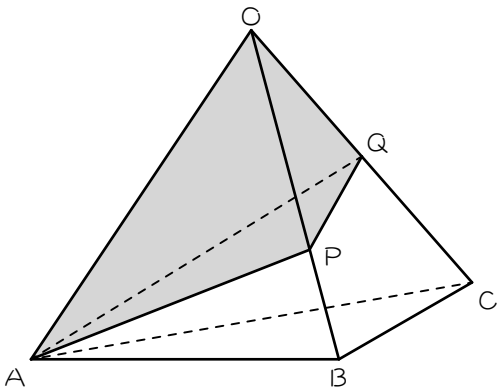
【図１】



【図２】



【図３】



【図４】

(1)　図３において、

①　三角すいＯＡＣＤの体積は四角すいＯＡＢＣＤの体積の（　　）倍です。

②　三角すいＯＡＱＲは三角すいＯＡＣＤの体積の（　　）倍です。

③　①②より、三角すいＯＡＱＲの体積は四角すいＯＡＢＣＤの体積の（　　）倍です。

(2)　図４において、

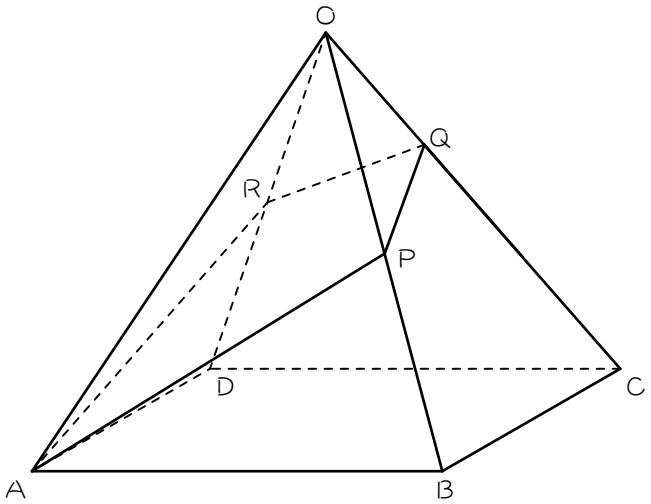
①　三角すいＯＡＢＣの体積は四角すいＯＡＢＣＤの体積の（　　）倍です。

②　三角すいＯＡＰＱは三角すいＯＡＢＣの体積の（　　）倍です。

③　①②より、三角すいＯＡＰＱの体積は四角すいＯＡＢＣＤの体積の（　　）倍です。

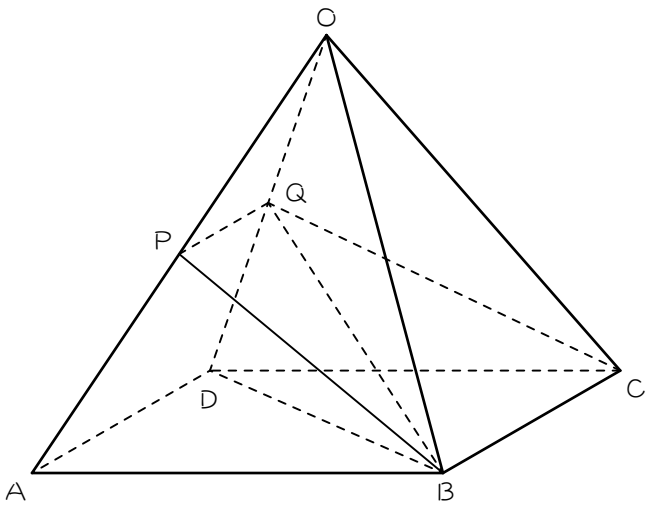
(3)　(1)(2)より、立体ＯＡＰＱＲの体積は四角すいＯＡＢＣＤの（　　）倍です。

2 図のように、底面が正方形の四角すいＯＡＢＣＤを、３点Ｐ、Ｑ、Ｒを通る平面で切断しました。ＯＰ：ＰＢ＝ＯＲ：ＲＤ＝１：１、ＯＱ：ＱＣ＝１：２のとき、切り口よりの上の立体ＯＡＰＱＲの体積は四角すいＯＡＢＣＤの何倍になりますか。



ステップ２

3 右の図は、底面が正方形の四角すいＯＡＢＣＤで、その体積は 800 ㎤です。いま、この四角すいを、辺ＢＣを通る平面で図のように切ったところ、ＯＰ：ＰＡ＝ＯＱ：ＱＤ＝１：１になりました。



(1) 三角すいＯＤＢＣの体積は（　　）㎤、三角すいＯＡＢＤの体積は（　　）㎤です。

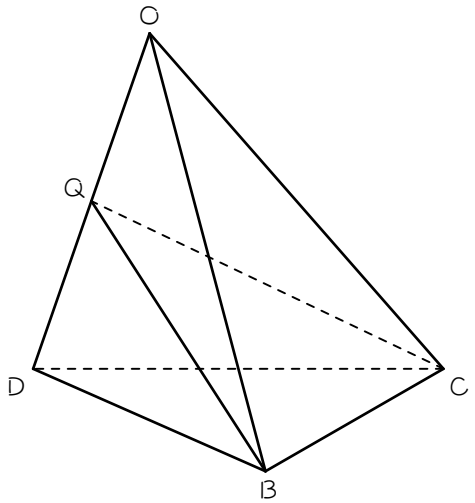
(2) 三角すいＯＱＢＣの底面を三角形ＯＱＢ、三角すいＱＤＢＣの底面を三角形ＱＤＢと考えます。このとき、三角すいＯＱＢＣと三角すいＱＤＢＣの

① 底面積の比は（　　）：（　　）です。

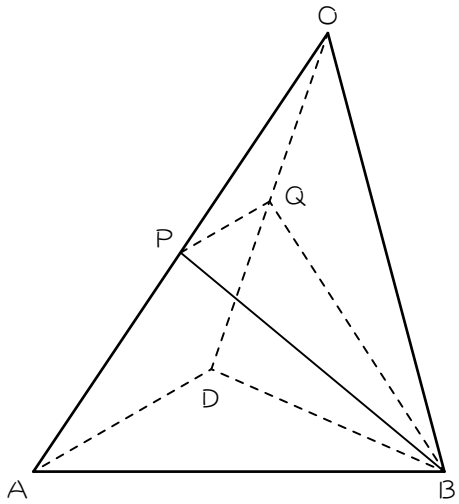
② 高さの比は（　　）：（　　）です。

③ 体積の比は（　　）：（　　）です。

④ ③より、三角すいＯＱＢＣの体積は（　　）㎤です。



(3)　三角すいＯＰＱＢの底面を三角形ＯＰＱ、四角すいＢ―ＰＡＤＱの底面を四角形ＰＡＤＱと考えます。このとき、三角すいＯＰＱＢと四角すいＢ―ＰＡＤＱの



①　底面積の比は（　　）：（　　）です。

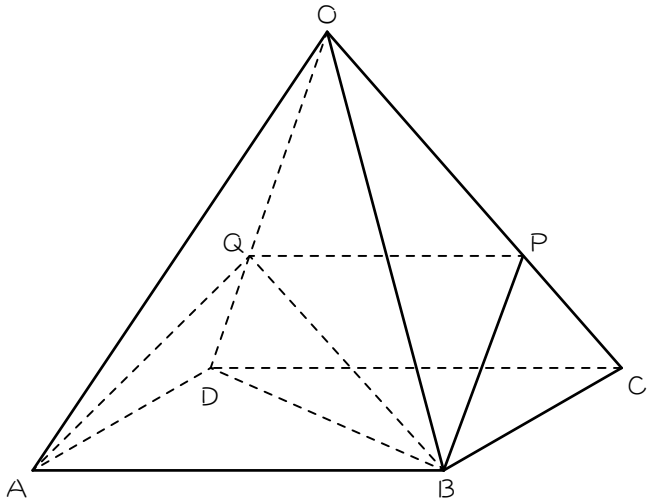
②　高さの比は（　　）：（　　）です。

③　体積の比は（　　）：（　　）です。

④　③より、三角すいＯＰＱＢの体積は
（　　）㎤です。

(4)　(2)(3)より、四角すいＯＰＱＢＣの体積は（　　）㎤です。

4 図のような、底面が正方形の四角すいＯＡＢＣＤがあり、その体積は 900 ㎤です。いま、この四角すいを、辺ＡＢ通る平面で図のように切ったところ、ＯＰ：ＰＣ＝ＯＱ：ＱＤ＝２：１になりました。

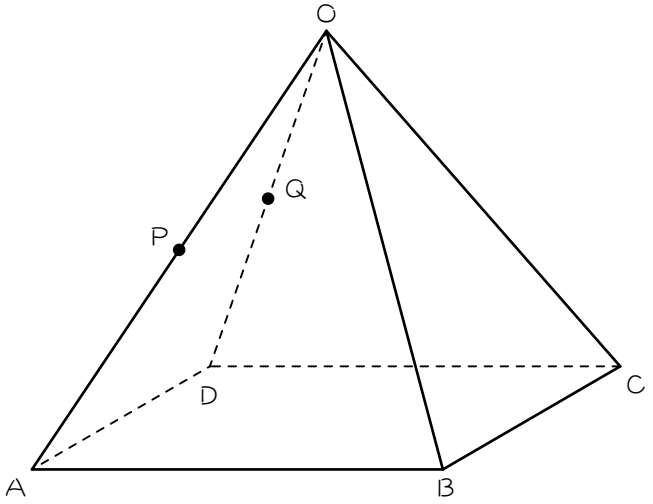


(1) 三角すいＯＡＢＱの体積は（　　）㎤です。

(2) 三角すいＯＢＰＱの体積は（　　）㎤です。

(3) 立体ＯＡＢＰＱの体積は（　　）㎤です。

5 図のような底面が正方形の正四角すいＯＡＢＣＤを、３点Ｂ、Ｐ、Ｑを通る平面で切断して２つの立体に分けるとき、次の問いに答えなさい。ただしＰ、Ｑは辺のまん中の点です。

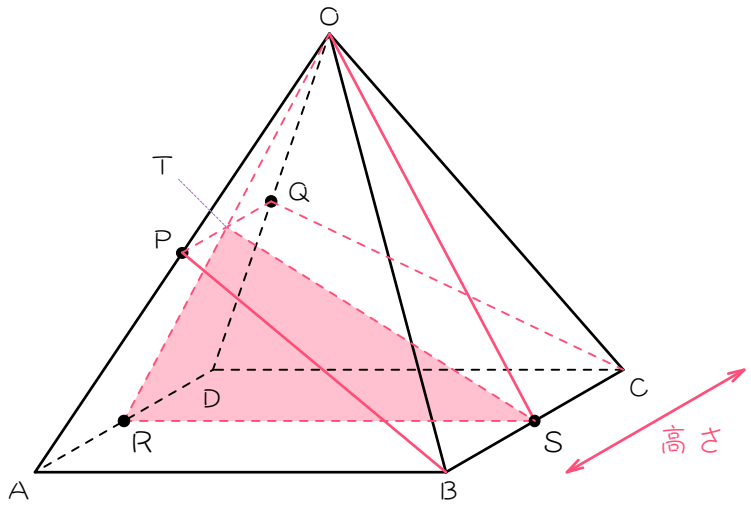


(1) 点Ｏを含む方の立体の体積は、四角すいＯＡＢＣＤの体積の何倍ですか。

(2) 点Ａを含む方の立体の体積は、四角すいＯＡＢＣＤの体積の何倍ですか。

ステップ３

6 5の(2)を、別の解き方で解きます。辺ＡＤ、辺ＢＣのまん中の点をＲ、Ｓとし、ＰＱとＯＲの交点をＴとします。

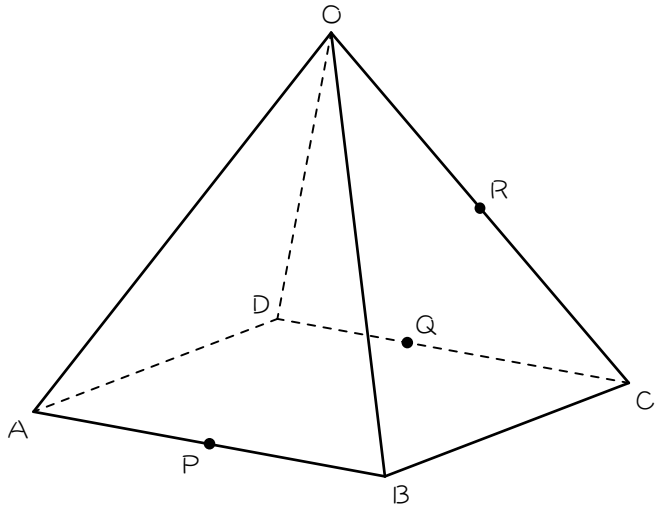


(1) 辺ＡＤ、辺ＢＣのまん中の点をＲ、Ｓとし、ＰＱとＯＲの交点をＴとします。正四角すいＯＡＢＣＤを、底面が三角形ＯＲＳの三角柱を斜めに切った立体、点Ａを含む方の立体（立体ＰＱＡＢＣＤ）を底面が三角形ＴＲＳの三角柱を斜めに切った立体と考えます。このとき、正四角すいＯＡＢＣＤの底面積と点Ａを含む方の立体の底面積の比は（　　）：（　　）です。

(2) (1)のとき、正四角すいＯＡＢＣＤの高さの平均と点Ａを含む方の立体の高さの平均の比は（　　）：（　　）です。

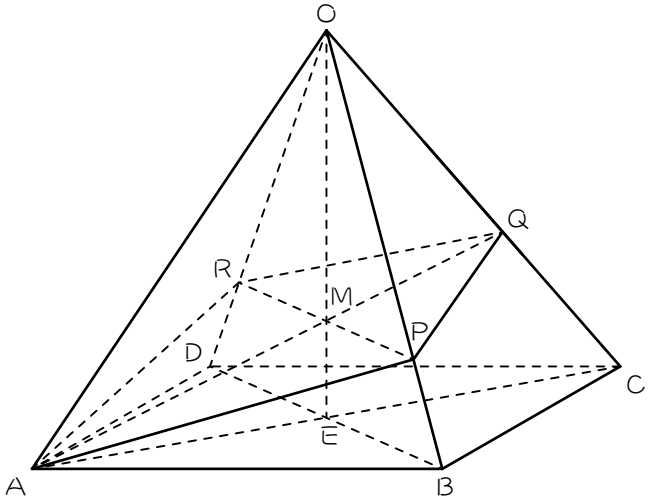
(3) (1)(2)より、正四角すいＯＡＢＣＤの体積と点Ａを含む方の立体の体積の比は（　　）：（　　）になるので、点Ａを含む方の立体の体積は、四角すいＯＡＢＣＤの体積の（　　）倍です。

7 図のような底面が正方形の四角すいＯＡＢＣＤを、３点Ｐ、Ｑ、Ｒを通る平面で切断して２つの立体に分けるとき、Ｂを含む方の体積は、四角すいＯＡＢＣＤの体積の何倍ですか。ただしＰ、Ｑ、Ｒは辺のまん中の点です。

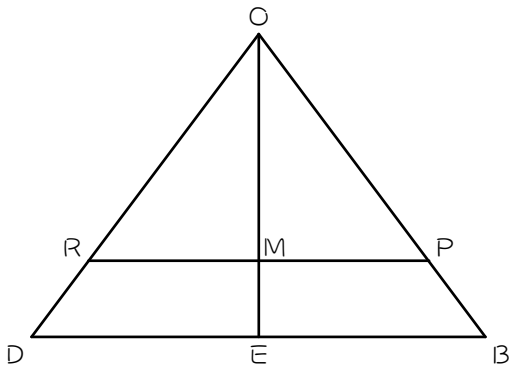


ステップ４

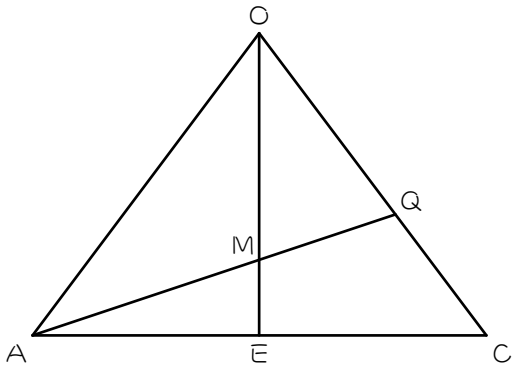
8 図のように、底面が正方形の四角すいＯＡＢＣＤを、３点Ｐ、Ｑ、Ｒを通る平面で切断しました。ＯＰ：ＰＢ＝ＯＲ：ＲＤ＝３：１のとき、次の問いに答えなさい。



(1) ＰＲとＯＥの交点をＭとすると、ＯＭ：ＭＥはいくらですか。四角すいの断面ＯＤＢに注目して考えなさい。



(2)　ＡとＭを結んで延長すると、ＯＣとの交点がＱとなります。このとき、ＯＱ：ＱＣはいくらですか。四角すいの断面ＯＡＣに注目して考えなさい。

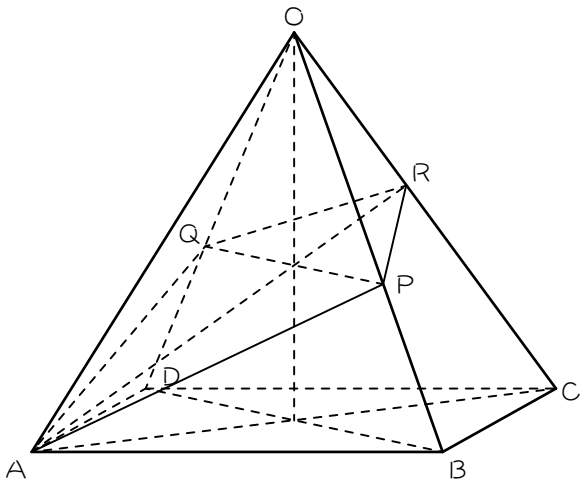


(3)　三角すいＯＡＰＱの体積は、四角すいＯＡＢＣＤの何倍ですか。

(4)　三角すいＯＡＱＲの体積は、四角すいＯＡＢＣＤの体積の何倍ですか。

(5)　切断面より上の立体ＯＡＰＱＲの体積は、四角すいＯＡＢＣＤの体積の何倍ですか。

9 図のように、すべての辺の長さが10cmの四角すいＯＡＢＣＤがあります。辺ＯＢ、辺ＯＤをともに３：２に分ける点をそれぞれＰ、Ｑとします。四角すいＡＢＣＤを３点Ａ、Ｐ、Ｑを通る平面で切ったとき、その平面と辺ＯＣが交わる点をＲとします。このとき、次の各問いに答えなさい。

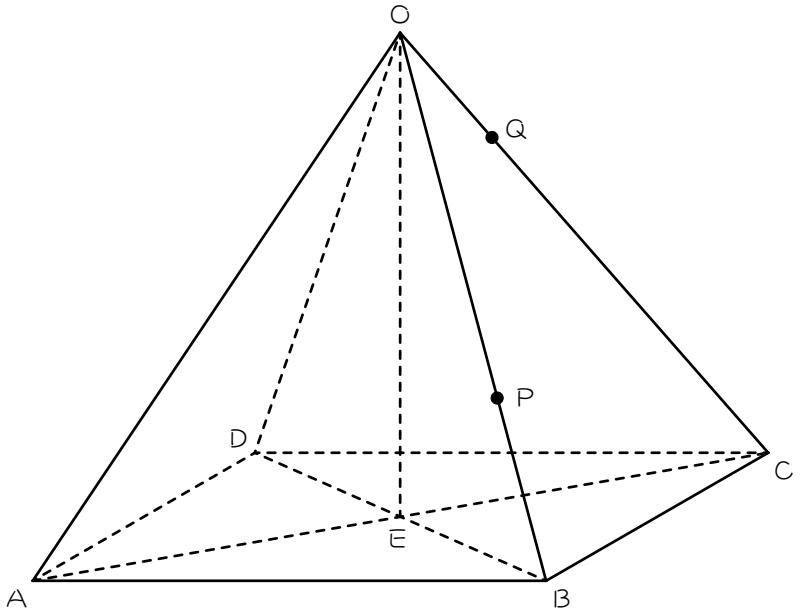


(1) ＯＲの長さは何cmですか。

(2) 四角すいＯＡＰＲＱの体積と四角すいＯＡＢＣＤの体積の比を最も簡単な整数の比で表しなさい。

ステップ５

１０ 図のような、底面が正方形の正四角すいＯＡＢＣＤがあり、ＯＰ：ＰＢ＝２：１、ＯＱ：ＱＣ＝１：３です。このとき、次の問いに答えなさい。



(1) ＡＱとＯＥの交点をＭとすると、ＯＭ：ＭＥはいくらですか。

(2)　次に、(1)で求めたＭとＰを結んで延長し、ＯＤとの交点をＲとします。このとき、ＯＲ：ＲＤはいくらですか。

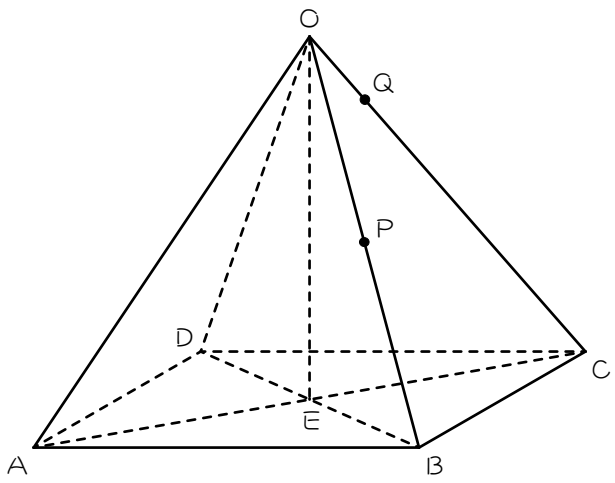
(3)　正四角すいＯＡＢＣＤを、３点Ａ、Ｐ、Ｑを通る平面で切断します。このとき、切り口と辺ＯＤの交点は(2)で求めた点Ｒになります。９ページの見取り図に、(1)(2)の順に点Ｒを正確に作図し、さらに切り口を作図しなさい。

(4)　①　三角すいＯＡＰＱの体積は、四角すいＯＡＢＣＤの体積の何倍ですか。

②　三角すいＯＡＱＲの体積は、四角すいＯＡＢＣＤの体積の何倍ですか。

③　四角すいＯＡＰＱＲの体積は、四角すいＯＡＢＣＤの体積の何倍ですか。

11 図のような、底面が正方形の正四角すいＯＡＢＣＤがあり、ＯＰ：ＰＢ＝１：１、ＯＱ：ＱＣ＝１：４です。このとき、次の問いに答えなさい。

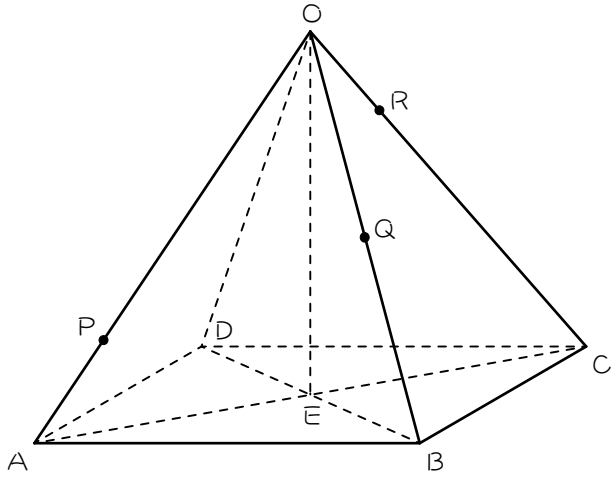


(1) ＡＱとＯＥの交点をＭとすると、ＯＭ：ＭＥはいくらですか。

(2) ＭとＰを結んで延長し、ＯＤとの交点をＲとします。このとき、ＯＲ：ＲＤはいくらですか。

(3) 正四角すいＯＡＢＣＤを、３点Ａ、Ｐ、Ｑを通る平面で切断します。このとき、Ｏを含む方の立体の体積は、四角すいＯＡＢＣＤの体積の何倍ですか。

12 図のような、底面が正方形の正四角すいＯＡＢＣＤがあり、ＯＰ：ＰＡ＝３：１、ＯＱ：ＱＢ＝３：２、ＯＲ：ＲＣ＝１：２です。正四角すいＯＡＢＣＤを、３点Ｐ、Ｑ、Ｒを通る平面で切断するとき、点Ｏを含む方の立体の体積は、四角すいＯＡＢＣＤの体積の何倍ですか。



■ 解答 ■

1 (1) ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{6}$

(2) ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{6}$

(3) $\frac{1}{3}$

2 $\frac{1}{6}$倍

3 (1) 400、400

(2) ① 1、1

② 1、1

③ 1、1

④ 200

(3) ① 1、3

② 1、1

③ 1、3

④ 100

(4) 300

4 (1) 300 (2) 200 (3) 500

5 (1) $\frac{3}{8}$倍 (2) $\frac{5}{8}$倍

6 (1) 2、1

(2) 4、5

(3) 8、5、$\frac{5}{8}$

7 $\frac{5}{16}$倍

8 (1) 3：1

(2) 3：2

(3) $\frac{9}{40}$

(4) $\frac{9}{40}$

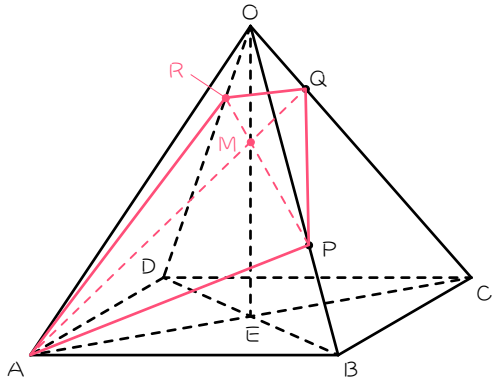
(5) $\frac{9}{20}$

9 (1) $4\frac{2}{7}$cm (2) 9：35

10 (1) 2：3

(2) 2：5

(3)



(4) ① $\frac{1}{12}$倍

② $\frac{1}{28}$倍

③ $\frac{5}{42}$倍

11 (1) 1：2

(2) 1：3

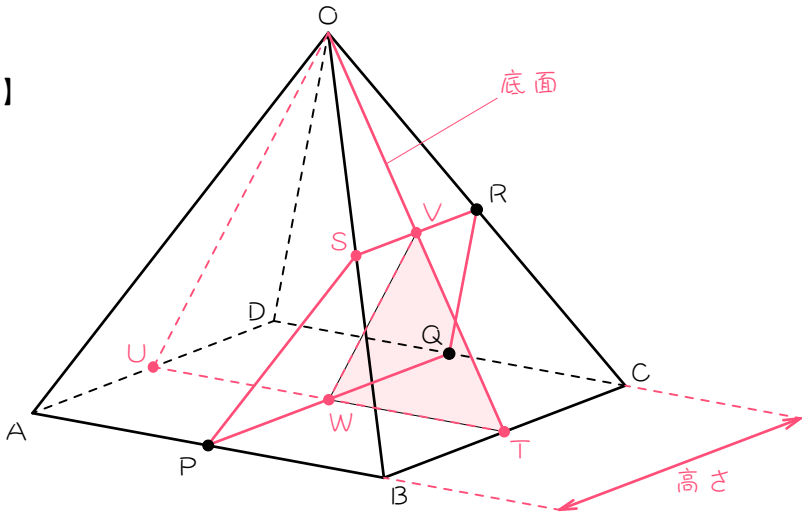
(3) $\frac{3}{40}$倍

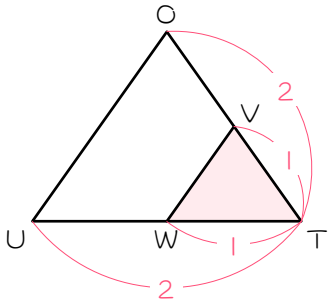
12 $\frac{39}{320}$倍

■ 解説 ■

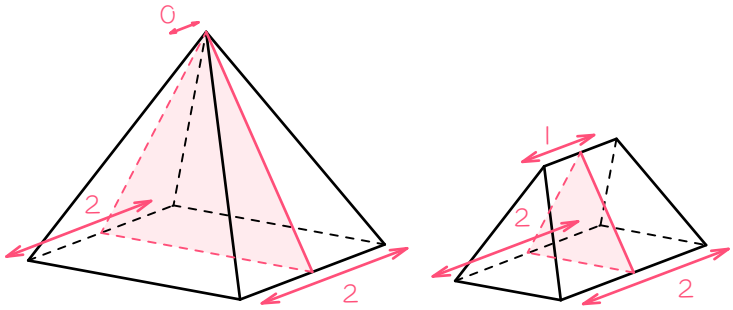
7

【図１】





【図２】



【図３】

切断面は図１のようになります。図１のように底面と高さをとると、

底面積の比は、図２より、

正四角すい：求める立体＝(２×２)：(１×１)＝４：１

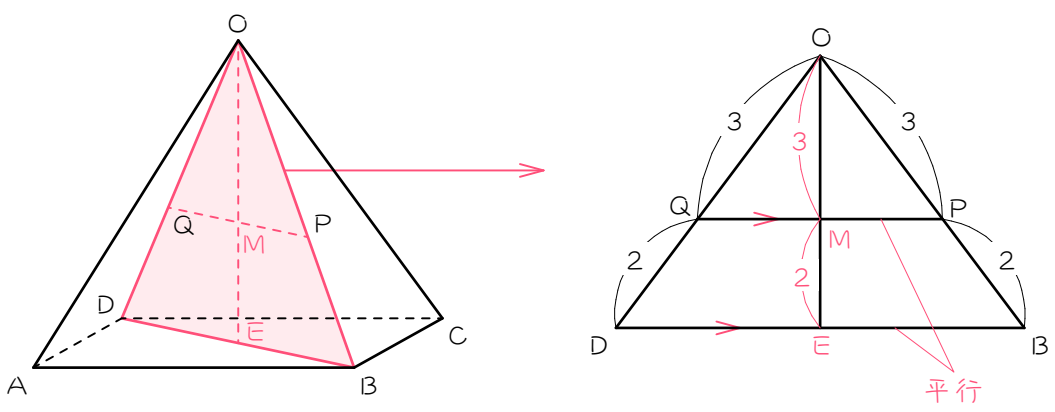
高さの平均の比は、図３より、

正四角すい：求める立体＝$\frac{2+2+0}{3}$：$\frac{2+2+1}{3}$＝４：５

よって、体積の比は、

正四角すい：求める立体＝(４×４)：(１×５)＝16：５ → $\frac{5}{16}$倍

9 (1)



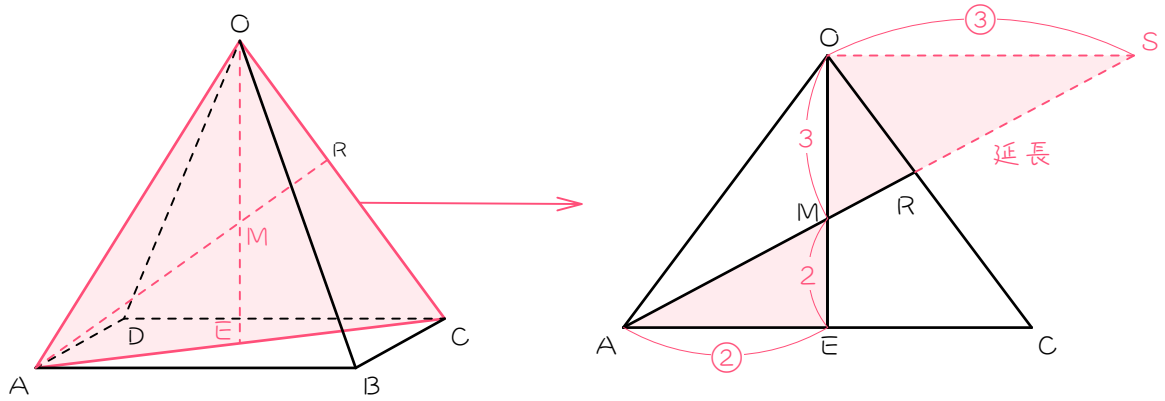
【図１】

・底面の対角線の交点をＥ、ＯＥとＰＱの交点をＭとする。

・図１のように面ＯＤＢで考えると、

ＯＱ：ＱＤ＝ＯＰ：ＰＢより、ＱＰとＤＢは平行。

よって、ＯＭ：ＭＥ＝３：２



【図２】

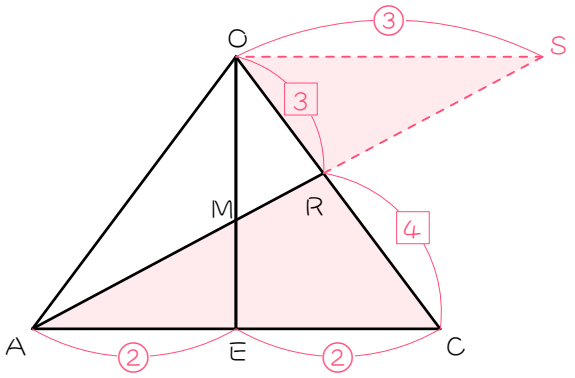
・次に、図２のように面ＯＡＣで考える。

・図２の赤い点線のように補助線を引いて

ちょうちょ相似をつくると、

ＯＭ：ＭＥ＝３：２より、ＯＳ：ＡＥ＝３：２

・よって、ＯＳ＝③、ＡＥ＝②とする。



【図３】

・ＥＣ＝ＡＥ＝②

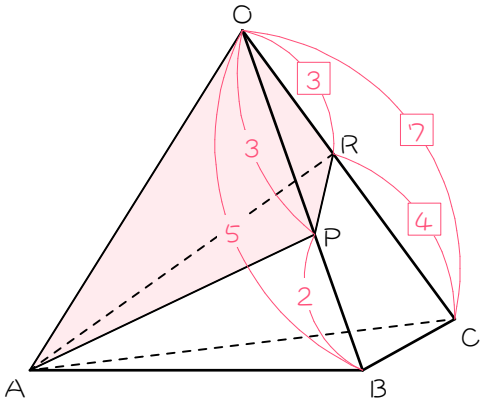
・図３の赤いちょうちょ相似に注目

ＯＳ：ＡＣ＝３：４より、

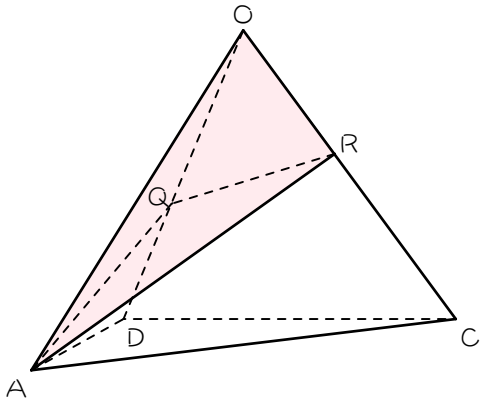
ＯＲ：ＲＣ＝３：４

・よって、ＯＲ＝$10\times\frac{3}{7}=\frac{30}{7}$(cm)

(2)　＜体積は半分にして考える＞



【図４】



【図５】

・【図４】

三角すいＯＡＢＣの体積は、全体の体積の$\frac{1}{2}$倍

三角すいＯＡＰＲの体積は、三角すいＯＡＢＣの体積の、$\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{35}$(倍)

よって、三角すいＯＡＰＲの体積は、全体の体積の、$\frac{1}{2}\times\frac{9}{35}=\frac{9}{70}$(倍)

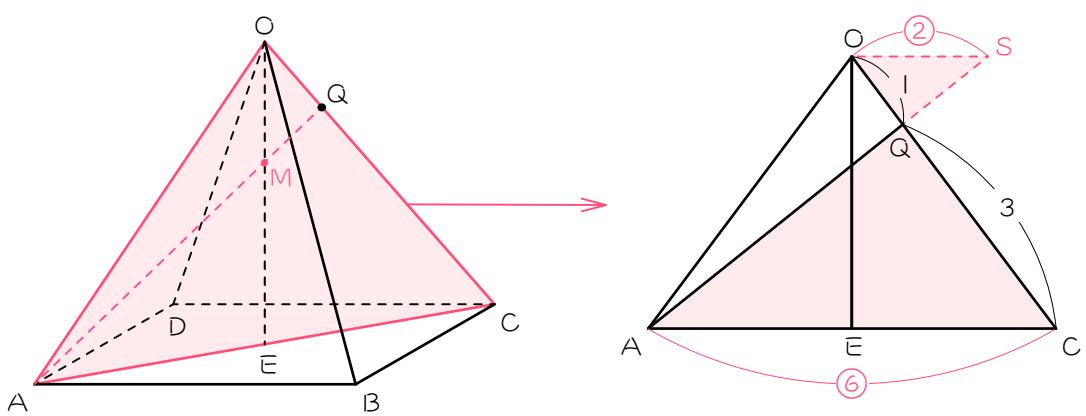
・【図５】

三角すいＯＡＲＱの体積も、対称性により、$\frac{9}{70}$倍

・以上より、四角すいＯＡＰＲＱの体積は、全体の体積の$\frac{9}{70}\times 2=\frac{9}{35}$(倍)

・よって、９：35

10 (1)



【図 1】

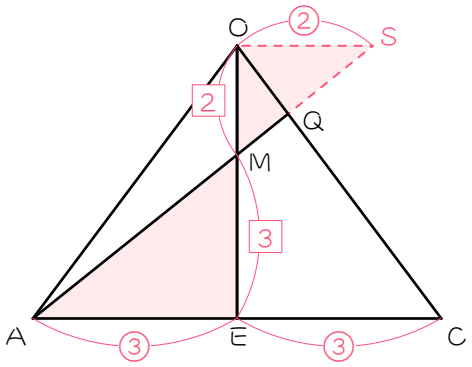
・図 1 のように面ＯＡＣで考える。

・図 1 のように延長してちょうちょ相似をつくると、

ＯＱ：ＱＣ＝1：3 より、ＯＳ：ＡＣ＝1：3

・よって、ＯＳ＝②、ＡＣ＝⑥とする。

1　：　3



【図 2】

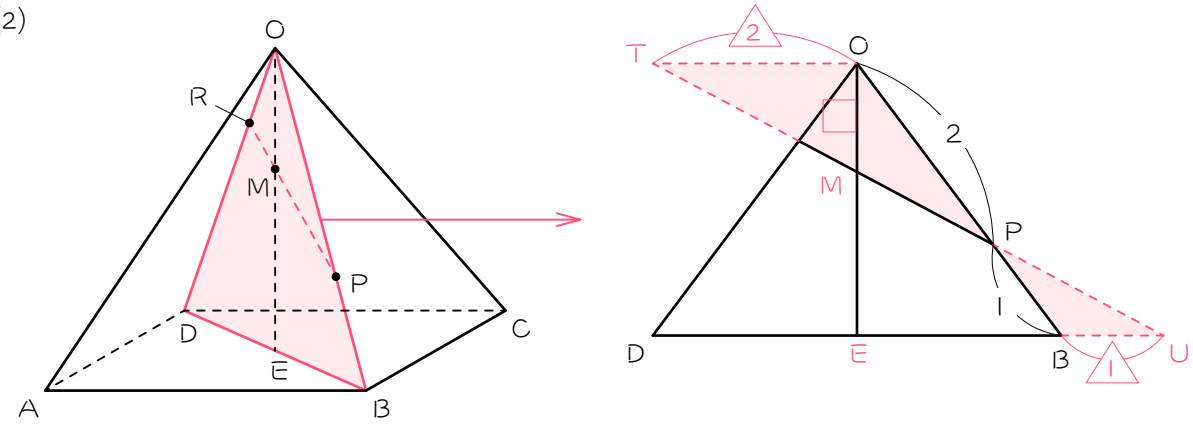
・ＡＥ＝ＥＣ＝⑥÷２＝③

・図 3 の赤いちょうちょ相似に注目

ＯＳ：ＡＥ＝2：3 より、

ＯＭ：ＭＥ＝2：3

(2)



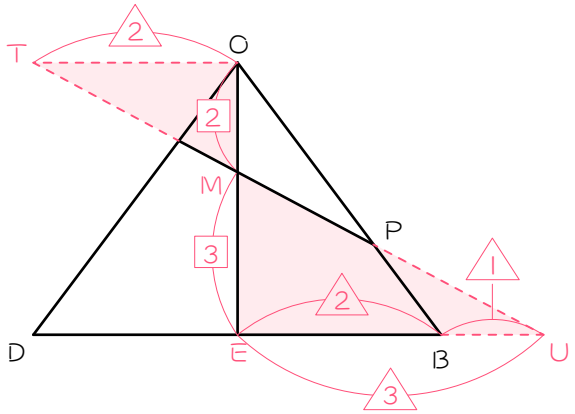
【図３】

・次に、図３のように面ＯＤＢで考える。

・図３のようにちょうちょ相似をつくると、

ＯＰ：ＰＢ＝２：１より、ＴＯ：ＢＵ＝２：１

・よって、ＴＯ＝△2、ＢＵ＝△1とする。



【図４】

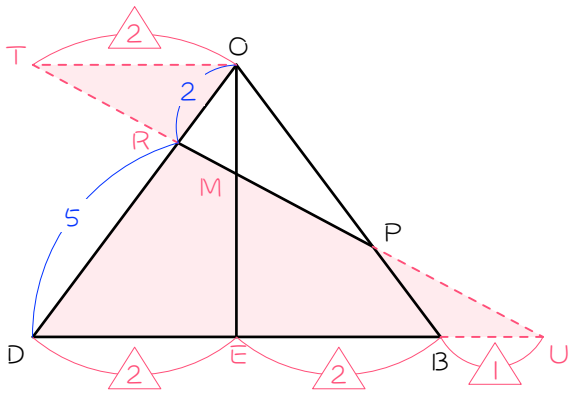
・図４の赤いちょうちょ相似に注目。

ＯＭ：ＭＣ＝２：３より、

ＴＯ：ＥＵ＝２：３

・よって、ＥＵ＝△2×$\frac{3}{2}$＝△3

ＥＢ＝△3－△1＝△2



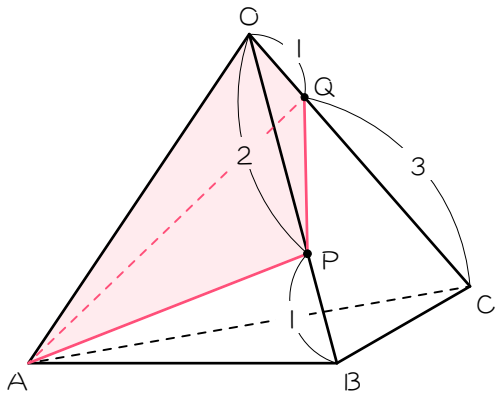
【図５】

・図５の赤いちょうちょ相似に注目。

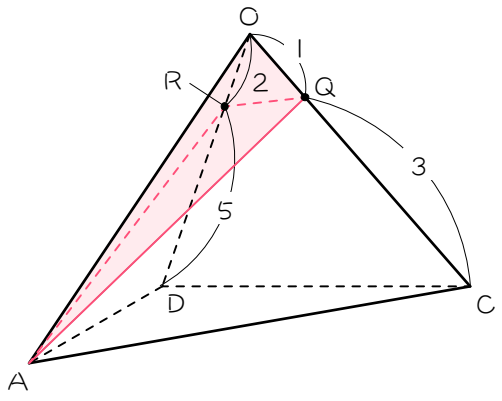
ＴＯ：ＤＵ＝△2：△5 より、

ＯＲ：ＲＤ＝<u>２：５</u>

(4)　＜体積は半分にして考える＞



【図６】



【図７】

①　【図６】

三角すいＯＡＢＣの体積は、全体の体積の$\frac{1}{2}$倍

三角すいＯＡＰＱの体積は、三角すいＯＡＢＣの体積の、$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$(倍)

よって、三角すいＯＡＰＱの体積は、全体の体積の、$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\underline{\frac{1}{12}(倍)}$

②　【図７】

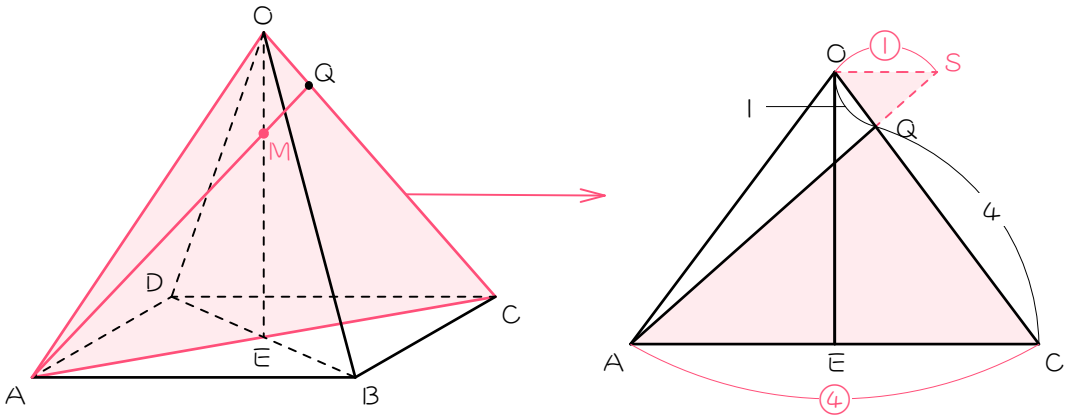
三角すいＯＡＣＤの体積は、全体の体積の$\frac{1}{2}$倍

三角すいＯＡＱＲの体積は、三角すいＯＡＣＤの体積の、$\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{14}$(倍)

よって、三角すいＯＡＱＲの体積は、全体の体積の、$\frac{1}{2}\times\frac{1}{14}=\underline{\frac{1}{28}(倍)}$

③　①②より、$\frac{1}{12}+\frac{1}{28}=\underline{\frac{5}{42}(倍)}$

11 (1)



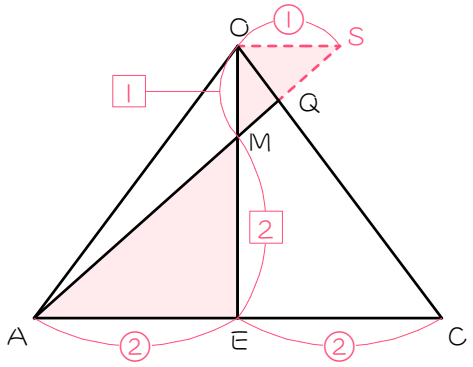
【図1】

・図1のように面OACで考える。

・図1のように延長してちょうちょ相似をつくると、

OQ：QC＝1：4より、OS：AC＝1：4

・よって、OS＝①、AC＝④とする。



【図2】

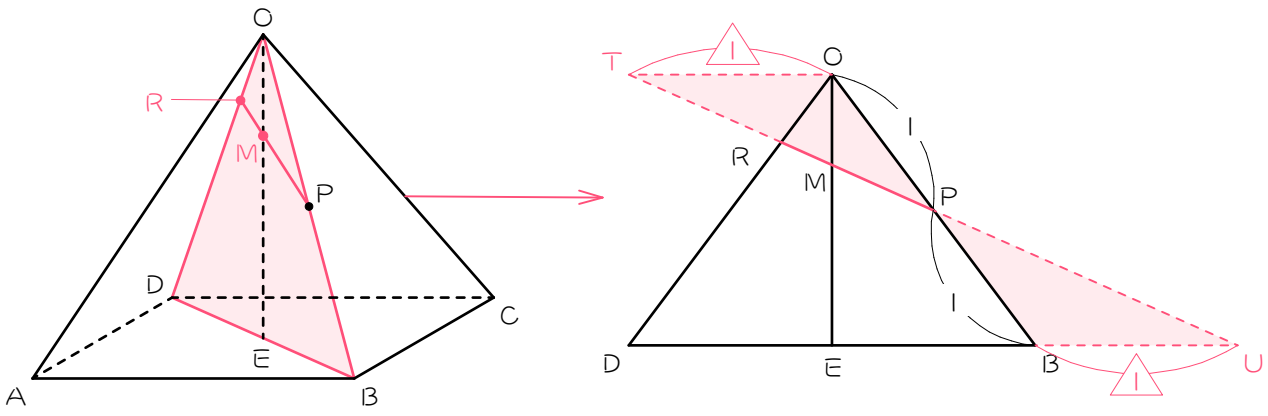
・AE＝EC＝④÷2＝②

・図2の赤いちょうちょ相似に注目

OS：AE＝1：2より、

M：ME＝1：2

(2)



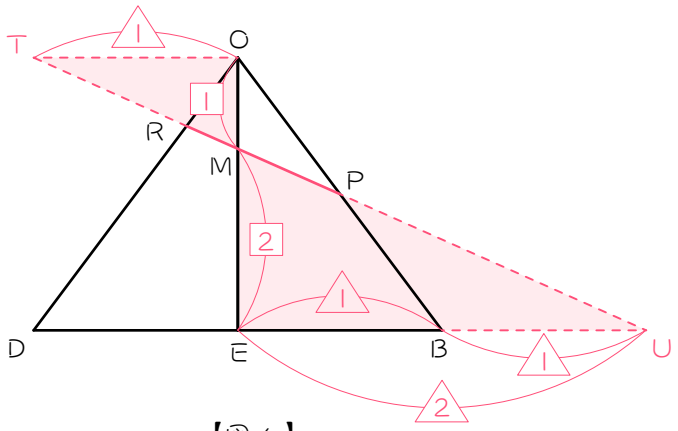
【図３】

・次に、図３のように面ＯＤＢで考える。

・図３のようにちょうちょ相似をつくると、

ＯＰ：ＰＢ＝１：１より、ＴＯ：ＢＵ＝１：１

・よって、ＴＯ＝△１、ＢＵ＝△１とする。



【図４】

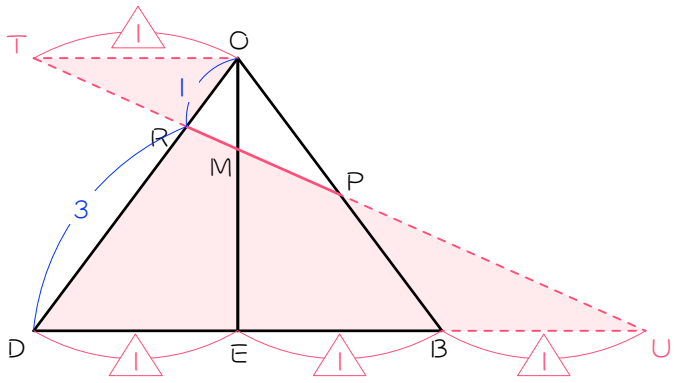
・図４の赤いちょうちょ相似に注目。

ＯＭ：ＭＣ＝１：２より、

ＴＯ：ＥＵ＝１：２

・よって、ＥＵ＝△１×２＝△２

ＥＢ＝△２－△１＝△１



【図５】

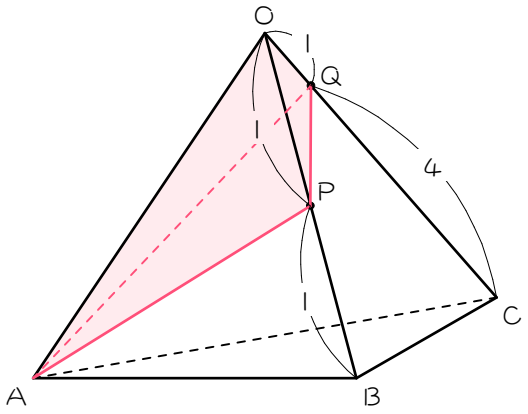
・ＤＥ＝ＥＢ＝△１

・図５の赤いちょうちょ相似に注目。

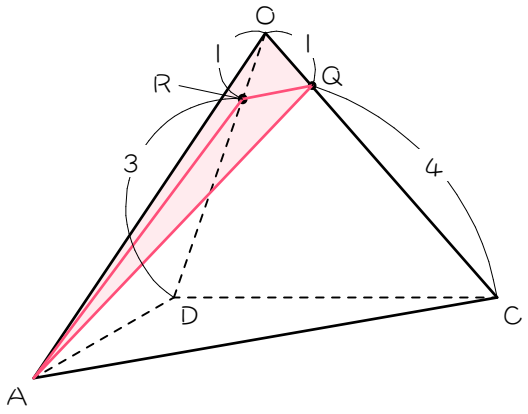
ＴＯ：ＤＵ＝△１：△３ より、

ＯＲ：ＲＤ＝１：３

(3)　＜体積は半分にして考える＞



【図６】



【図７】

・【図６】

三角すいＯＡＢＣの体積は、全体の体積の$\frac{1}{2}$倍

三角すいＯＡＰＱの体積は、三角すいＯＡＢＣの体積の、$\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$(倍)

よって、三角すいＯＡＰＱの体積は、全体の体積の、$\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{20}$(倍)

・【図７】

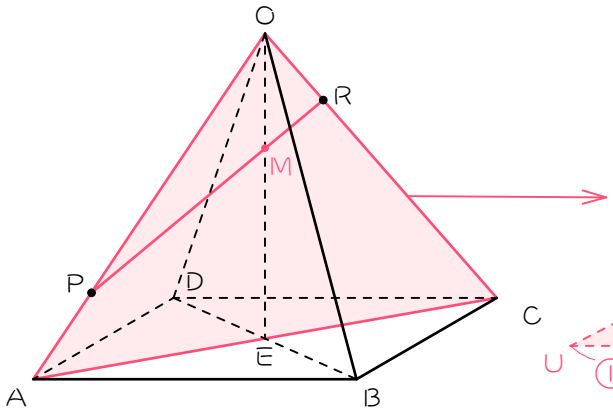
三角すいＯＡＣＤの体積は、全体の体積の$\frac{1}{2}$倍

三角すいＯＡＱＲの体積は、三角すいＯＡＣＤの体積の、$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$(倍)

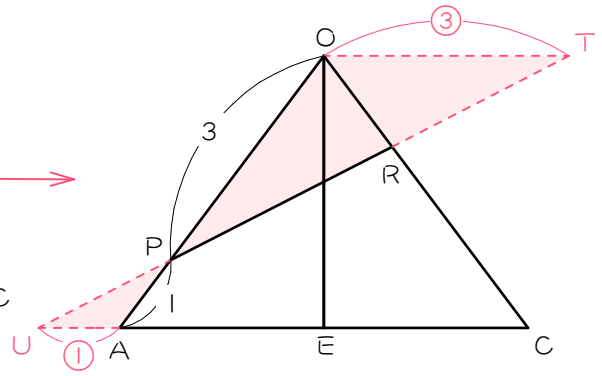
よって、三角すいＯＡＱＲの体積は、全体の体積の、$\frac{1}{2}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{40}$(倍)

・よって、$\frac{1}{20}+\frac{1}{40}=\underline{\frac{3}{40}}$(倍)

12 ＜底面の対角線の交点をＥ、ＯＥとＰＲの交点をＭとして、ＯＭ：ＭＥを求める＞



【図２】



【図１】

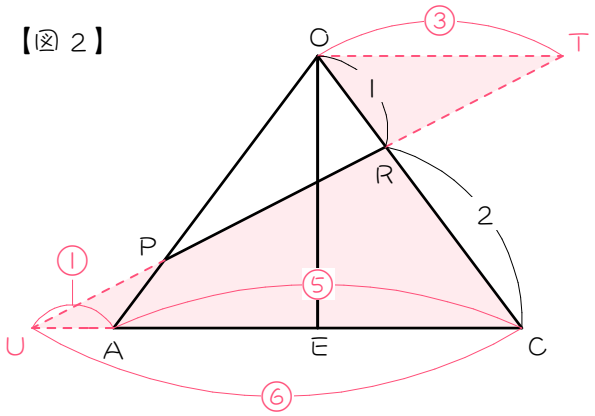
・図１のように面ＯＡＣで考える。

・図１のようにＰＲ延長してちょうちょ相似をつくると、

ＯＰ：ＰＡ＝３：１より、ＯＴ：ＵＡ＝３：１

・よって、ＯＴ＝③、ＵＡ＝①とする。

【図２】



・図２の赤いちょうちょ相似に注目。

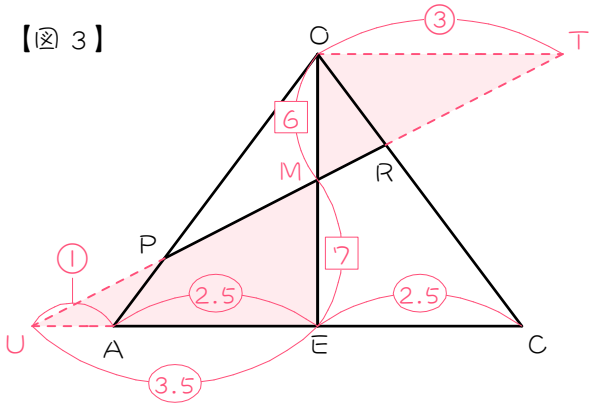
ＯＲ：ＲＣ＝１：２より、

ＯＴ：ＵＣ＝１：２

・よって、ＵＣ＝③×２＝⑥

ＡＣ＝⑥－①＝⑤

【図３】



・⑤÷２＝2.5

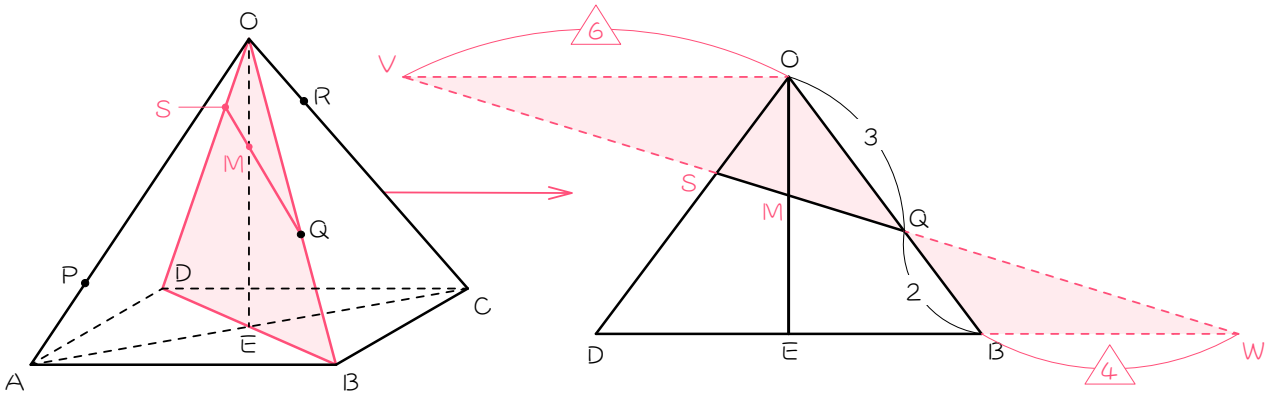
・図５の赤いちょうちょ相似に注目。

ＯＴ：Ｕ＝③：３5

＝６：７より、

ＯＭ：ＭＥ＝６：７

＜ＱＭの延長線とＯＤの交点をＳとして、ＯＳ：ＳＤを求める＞



【図４】

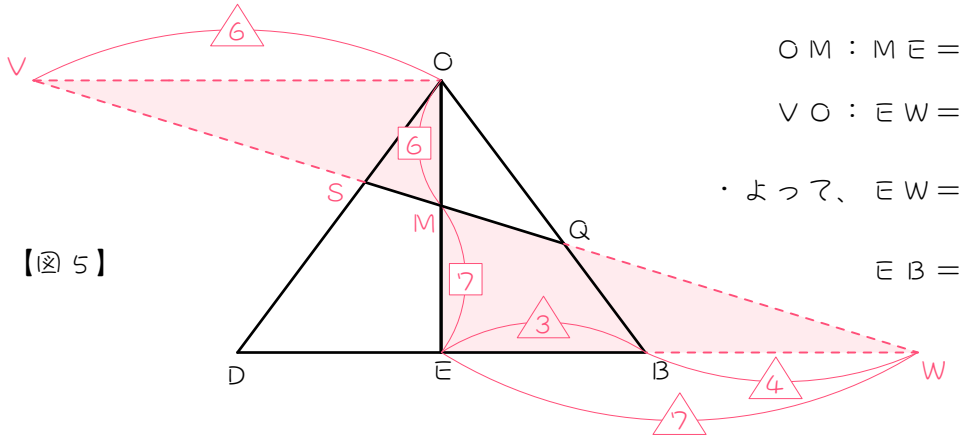
・次に、図４のように面ＯＤＢで考える。

・図４のようにちょうちょ相似をつくると、

ＯＱ：ＱＢ＝３：２より、ＶＯ：ＢＷ＝３：２

・よって、ＴＯ＝△6、ＢＵ＝△4とする。

３　：　２



【図５】

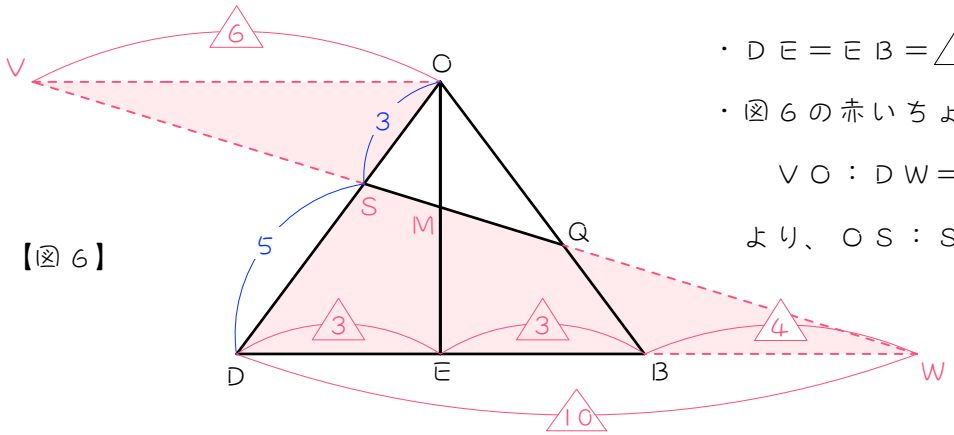
・図５の赤いちょうちょ相似に注目。

ＯＭ：ＭＥ＝６：７より、

ＶＯ：ＥＷ＝６：７

・よって、ＥＷ＝△6×$\frac{7}{6}$＝△7

ＥＢ＝△7－△4＝△3



【図６】

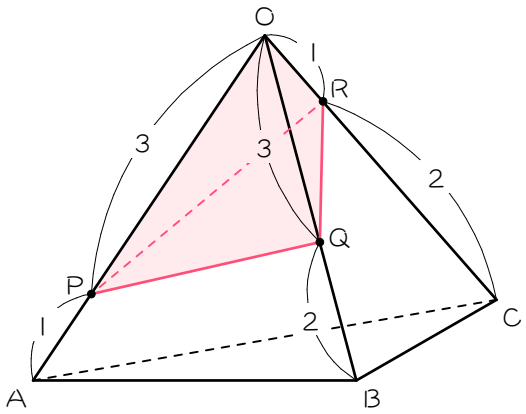
・ＤＥ＝ＥＢ＝△3

・図６の赤いちょうちょ相似に注目。

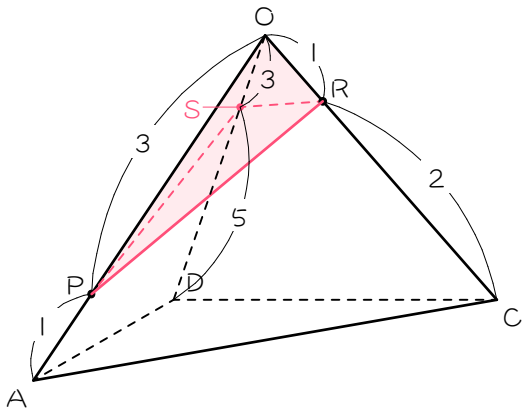
ＶＯ：ＤＷ＝△6：△10＝３：５

より、ＯＳ：ＳＤ＝３：５

＜体積は半分にして考える＞



【図７】



【図８】

・【図７】

三角すいＯＡＢＣの体積は、全体の体積の$\frac{1}{2}$倍

三角すいＯＰＱＲの体積は、三角すいＯＡＢＣの体積の、$\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{20}$(倍)

よって、三角すいＯＡＰＱの体積は全体の体積の、$\frac{1}{2}\times\frac{3}{20}=\frac{3}{40}$(倍)

・【図８】

三角すいＯＡＣＤの体積は、全体の体積の$\frac{1}{2}$倍

三角すいＯＡＰＲＳの体積は、三角すいＯＡＣＤの体積の、$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{32}$(倍)

よって、三角すいＯＡＱＲの体積は全体の体積の、$\frac{1}{2}\times\frac{3}{32}=\frac{3}{64}$(倍)

・よって、$\frac{3}{40}+\frac{3}{64}=\underline{\frac{39}{320}}$(倍)