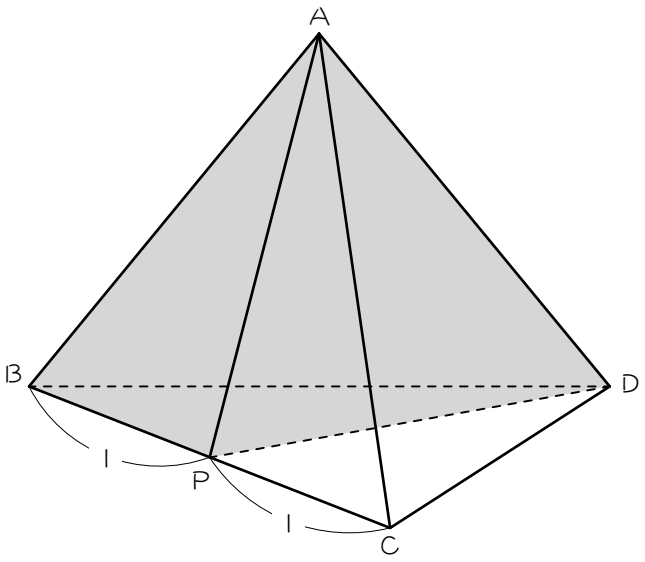
ステップ１

１ 図のような三角すいＡＢＣＤがあり、ＢＰ：ＰＣ＝１：１です。このとき、三角すいＡＢＰＤの体積が、三角すいＡＢＣＤの体積の何倍かを求めようと思います。



(1) すいの体積は、「底面積×高さ×$\frac{1}{3}$」で求められるので、底面積の割合と高さの割合が分かれば、体積の割合も分かります。

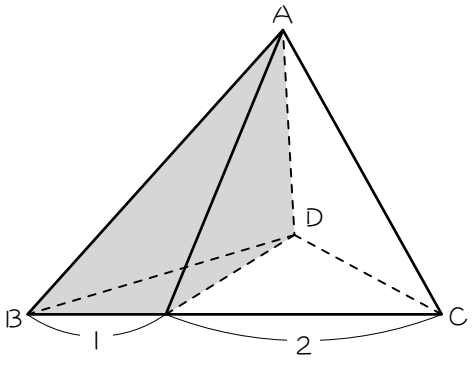
三角すいＡＢＰＤの底面を三角形ＢＰＤ、三角すいＡＢＣＤの底面を三角形ＢＣＤとすると、三角すいＡＢＰＤの底面積は三角すいＡＢＣＤの底面積の（　　）倍です。

(2) (1)のとき、三角すいＡＢＰＤの高さは三角すいＡＢＣＤの高さの（　　）倍です。

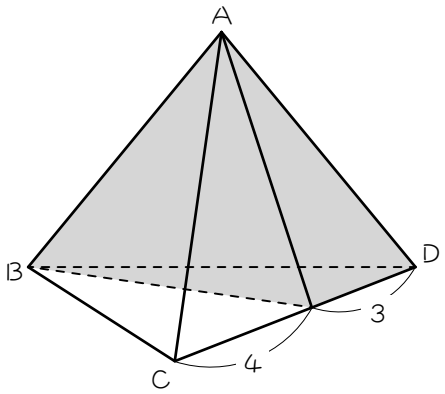
(3) (1)(2)より、三角すいＡＢＰＤの体積は、三角すいＡＢＣＤの体積の（　　）倍です。

2 次の(1)〜(6)において、色のついた三角すいの体積は、三角すいＡＢＣＤの体積の何倍ですか。ただし、図中の数字は、辺を分ける比を表しています。

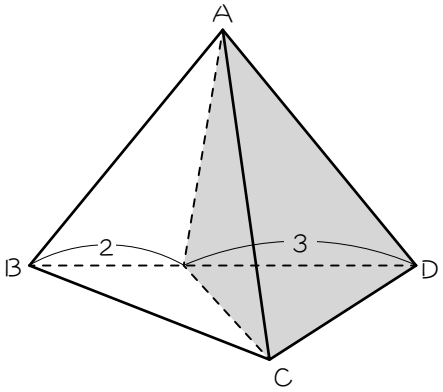
(1)



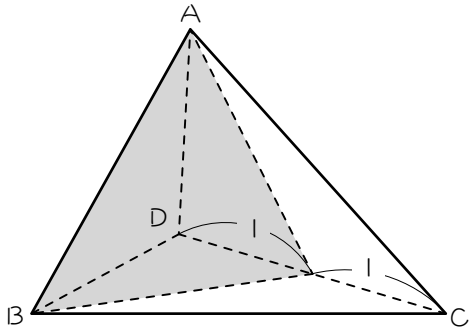
(2)



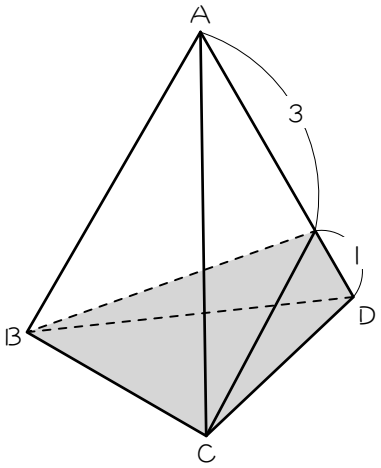
(3)



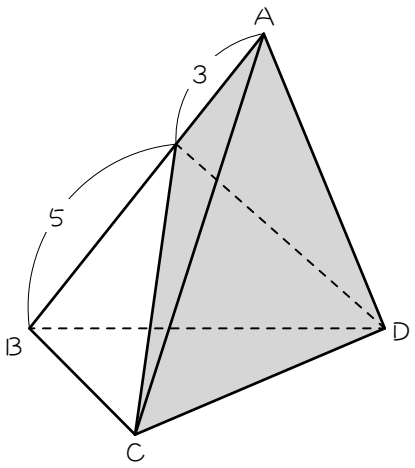
(4)



(5)

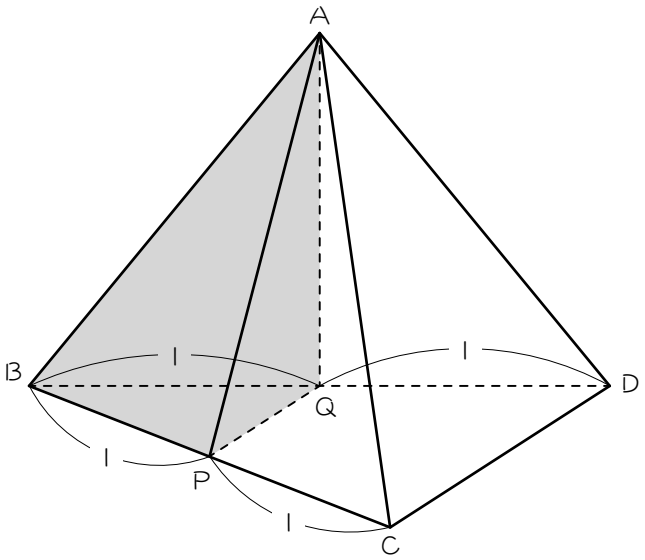


(6)



ステップ２

3 図のような三角すいＡＢＣＤがあり、ＢＰ：ＰＣ＝ＢＱ：ＱＤ＝１：１です。



(1) 三角すいＡＢＰＱの底面を三角形ＢＰＱ、三角すいＡＢＣＤの底面を三角形ＢＣＤとすると、三角すいＡＢＰＱの底面積は三角すいＡＢＣＤの底面積の

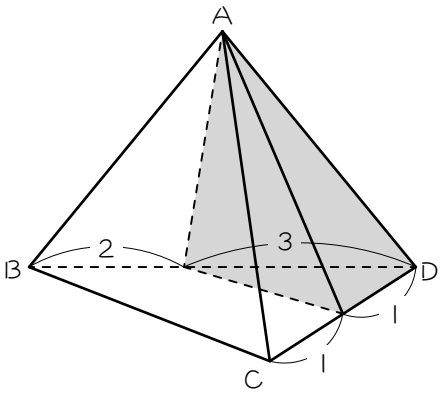
（　　）×（　　）＝（　　）倍です。

(2) (1)のとき、三角すいＡＢＰＱの高さは三角すいＡＢＣＤの高さの（　　）倍です。

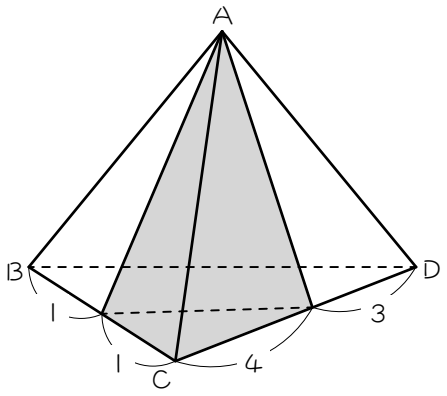
(3) (1)(2)より、三角すいＡＢＰＱの体積は、三角すいＡＢＣＤの体積の（　　）倍です。

4 次の(1)〜(3)において、色のついた三角すいの体積は、三角すいＡＢＣＤの体積の何倍ですか。ただし、図中の数字は、辺を分ける比を表しています。

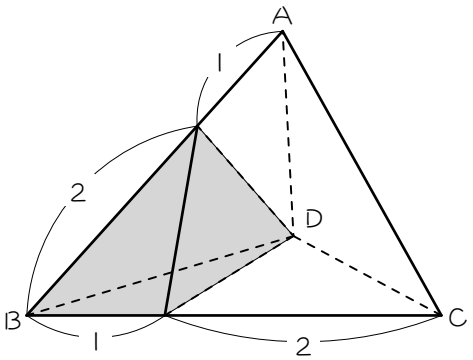
(1)



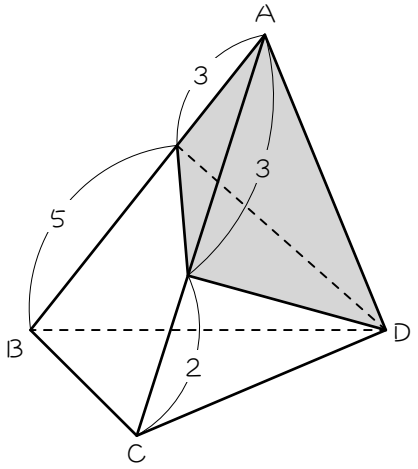
(2)



(3)

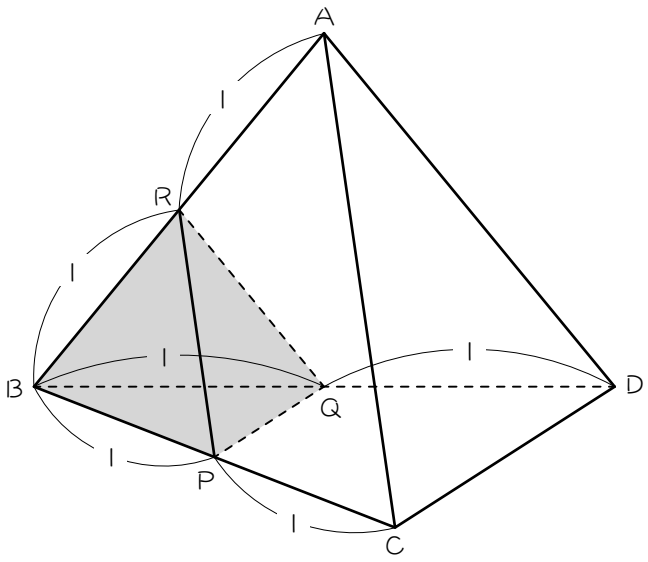


(4)



ステップ３

5 図のような三角すいＡＢＣＤがあり、ＢＰ：ＰＣ＝ＢＱ：ＱＤ＝ＢＲ：ＲＡ＝１：１です。



(1) 三角すいＲＢＰＱの底面を三角形ＢＰＱ、三角すいＡＢＣＤの底面を三角形ＢＣＤとすると、三角すいＲＢＰＱの底面積は三角すいＡＢＣＤの底面積の

（　　）×（　　）倍です。

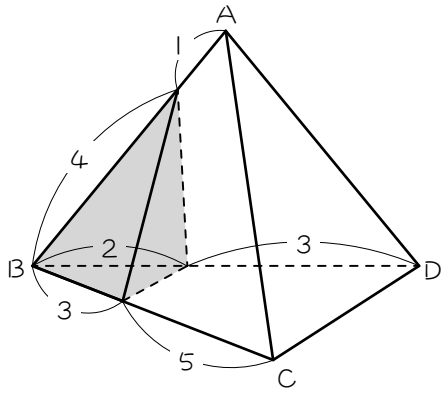
(2) (1)のとき、三角すいＲＢＰＱの高さは三角すいＡＢＣＤの高さの（　　）倍です。

(3) (1)(2)より、三角すいＲＢＰＱの体積は、三角すいＡＢＣＤの体積の

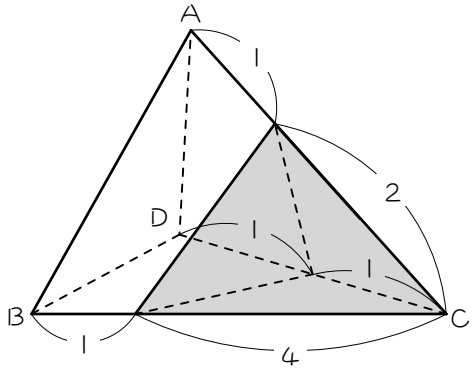
（　　）×（　　）×（　　）＝（　　）倍です。

6 次の(1)〜(3)において、色のついた三角すいの体積は、三角すいＡＢＣＤの体積の何倍ですか。ただし、図中の数字は、辺を分ける比を表しています。

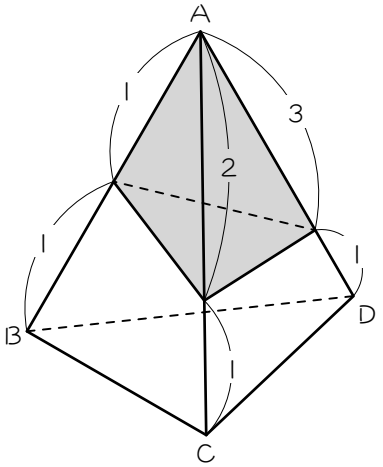
(1)



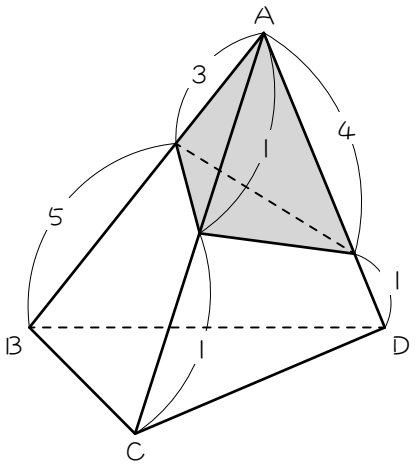
(2)



(3)



(4)

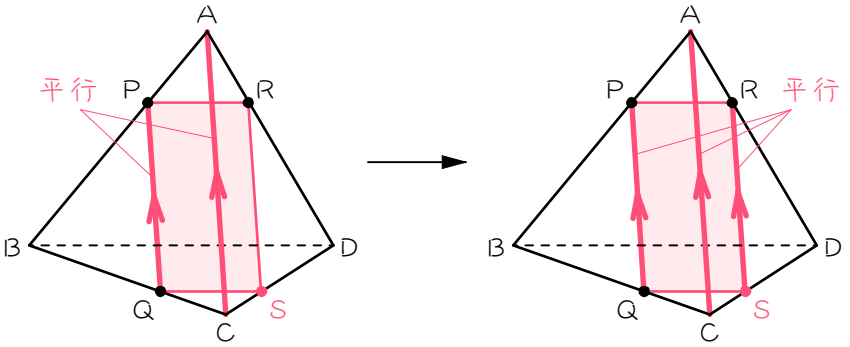


ステップ4　切り口の作図① - 辺と切り口が平行な場合

7

図１のように、三角すいＡＢＣＤを３点Ｐ、Ｑ、Ｒを通る平面で切断するとき、切り口と辺ＣＤの交点をＳとすると、ＰＱと辺ＡＣが平行なら、図２のように、ＰＱと辺ＡＣとＲＳは平行になります。※理由は難しいので、知っているだけでOK。

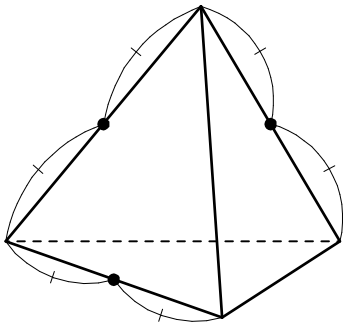
(理由を知りたい人は p.28)



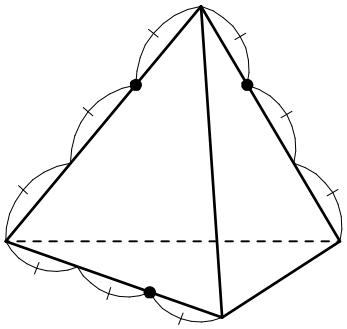
【図１】　　【図２】

以上を参考にして、次の(1)～(4)の三角すい●の３点を通る平面で切断したときの切り口を作図しなさい。

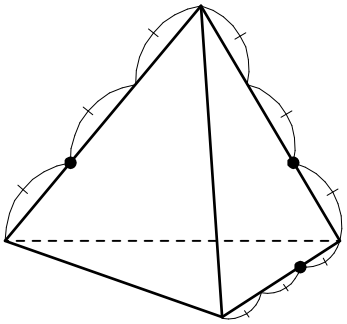
(1)



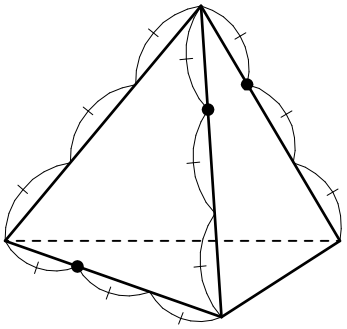
(2)



(3)



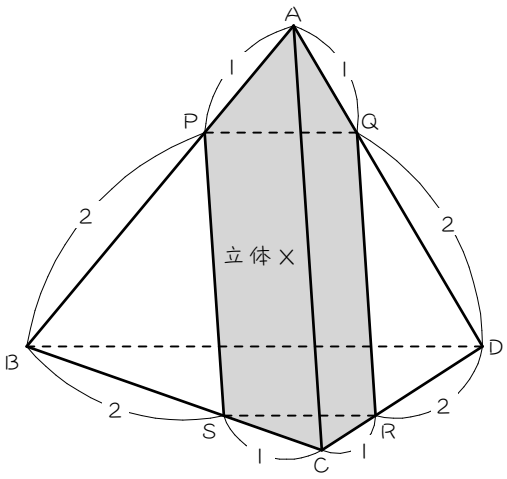
(4)



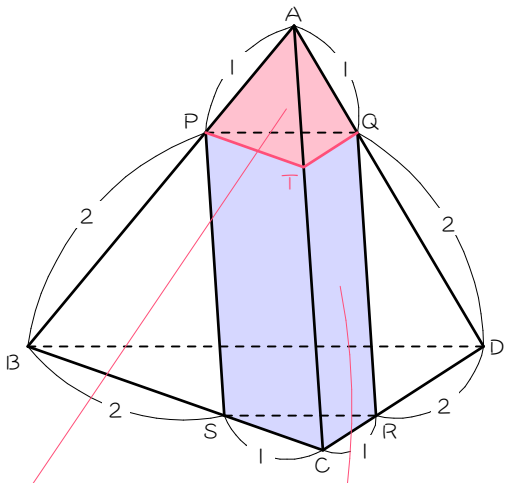
ステップ７　体積を求める①

8

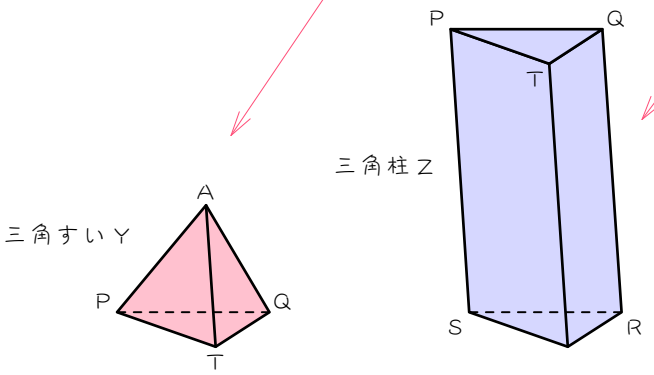
図１のような三角すいＡＢＣＤがあり、ＡＰ：ＰＢ＝ＡＱ：ＱＤ＝ＣＲ：ＲＤ＝ＣＳ：ＳＢ＝１：２です。三角すいＡＢＣＤを４点Ｐ、Ｑ、Ｒ、Ｓを通る平面で切断したとき、点Ｃを含む方の立体（色のついた部分の立体）を立体Ｘとします。立体Ｘの体積が、三角すいＡＢＣＤの体積の何倍かを求めようと思います。



【図１】



【図２】



【図３】

このままでは求められないので、図２のように、立体Ｘを点Ｐ、Ｑを通り底面ＢＣＤに平行な平面ＰＱＴで切断し、図３のように、三角すいＹと三角柱Ｚに分けます。

(1)　三角すいＹの体積は、三角すいＡＢＣＤの体積の、

（　　）×（　　）×（　　）＝（　　）倍です。

(2)　三角柱Ｚの体積について考えます。

①　三角すいＹと三角柱Ｚの底面積の比は（ア　　）：（イ　　）です。

②　三角すいＹと三角柱Ｚの高さの比は（ウ　　）：（エ　　）です。

③　①②より、三角すいＹと三角柱Ｚの体積の比は、

（ア　　×ウ　　）：（イ　　×エ　　×　　）

＝（　　）：（　　）です。

すいに対して
柱の体積だから

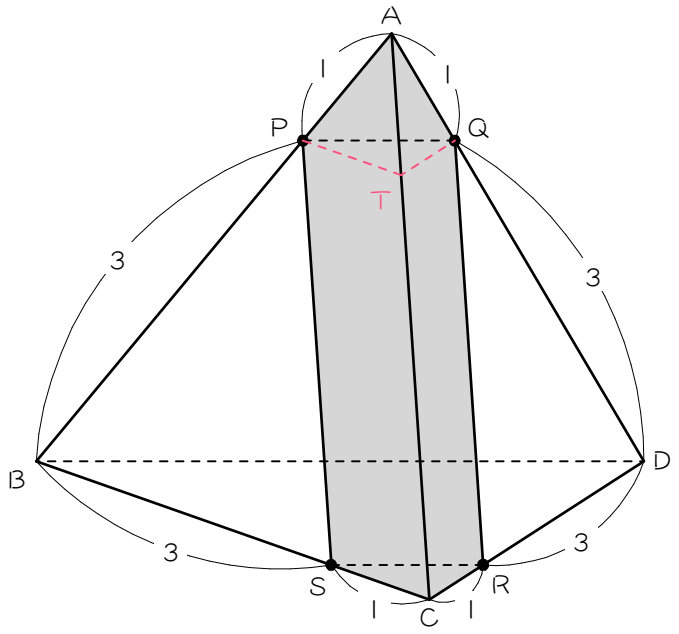
④　③と(1)より、三角柱Ｚの体積は、三角すいＡＢＣＤの体積の、

（　　）×（　　）＝（　　）倍です。

(3)　(1)(2)より、立体Ｘの体積は三角すいＡＢＣＤの体積の、

（　　）＋（　　）＝（　　）倍です。

9 図のような三角すいＡＢＣＤがあり、ＡＰ：ＰＢ＝ＡＱ：ＱＤ＝ＣＲ：ＲＤ＝ＣＳ：ＳＢ＝１：３です。三角すいＡＢＣＤを４点Ｐ、Ｑ、Ｒ、Ｓを通る平面で切断したとき、点Ｃを含む方の立体（色のついた部分の立体）を立体Ｘとします。このとき、次の問いに答えなさい。



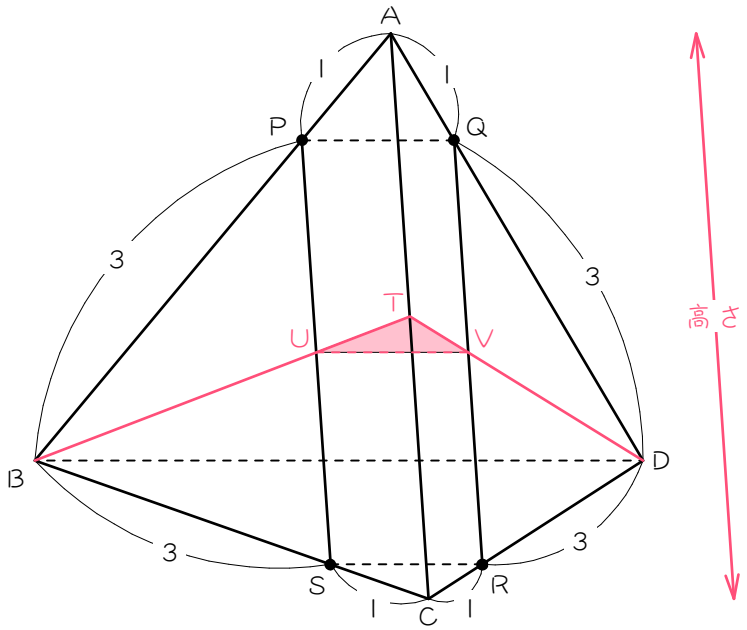
(1) 立体Ｘを点Ｐ、Ｑを通り底面ＢＣＤに平行な平面ＰＱＴで切断するとき、三角すいＡＰＱＴの体積は、三角すいＡＢＣＤの体積の（　　）倍です。

(2) (1)のとき、三角柱ＰＱＴ―ＳＲＣの体積は、三角すいＡＢＣＤの体積の（　　）倍です。

(3) 立体Ｘの体積は、三角すいＡＢＣＤの体積の（　　）倍です。

10☆

9の(2)を、別の解き方で解きます。



(1) 辺ＢＤを通り辺ＡＣに垂直な面で三角すいＡＢＣを切断し、切断面と辺ＡＣ、ＰＳ、ＱＲとの交点を、Ｔ、Ｕ、Ｖとします。三角すいＡＢＣＤを、底面が三角形ＢＴＤの三角柱を斜めに切った立体、点Ｃを含む方の立体を底面が三角形ＴＵＶの三角柱を斜めに切った立体と考えます。このとき、三角すいＡＢＣＤの底面積と点Ｃを含む方の立体の底面積の比は（　　）：（　　）です。

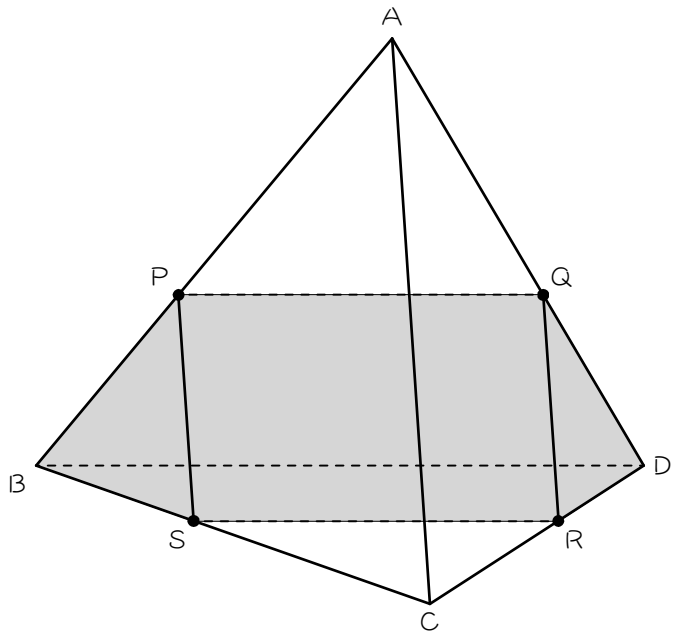
(2) (1)のとき、三角すいＡＢＣＤの高さの平均と点Ｃを含む方の立体の高さの平均の比は（　　）：（　　）です。

三角すいＡＢＣＤの高さ → Ｔ点での高さはＴＣ、Ｂ点での高さ＝０、Ｄ点での高さ＝０

点Ｃを含む方の立体の高さ → Ｔ点での高さ＝ＴＣ、Ｖ点での高さ＝ＱＲ、Ｕ点での高さ＝ＰＳ

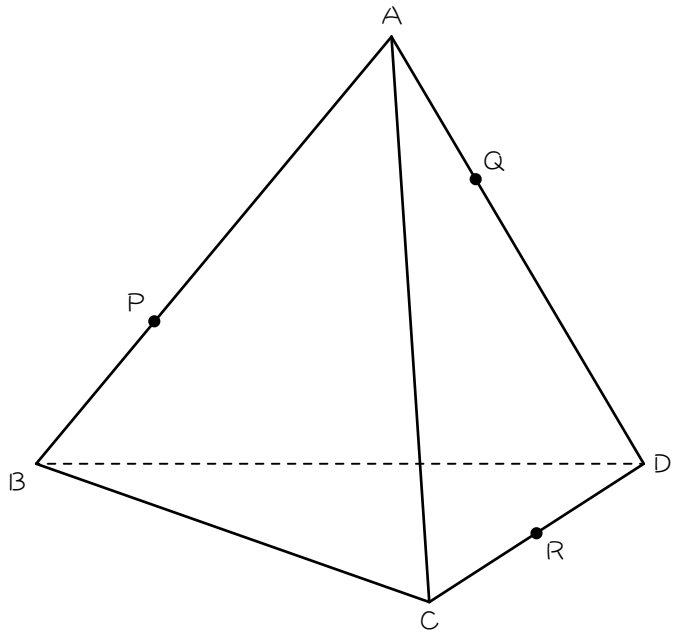
(3) (1)(2)より、正四角すいＯＡＢＣＤの体積と点Ｃを含む方の立体の体積の比は（　　）：（　　）になるので、点Ａを含む方の立体の体積は、三角すいＡＢＣＤの体積の（　　）倍です。

11 図のような三角すいＡＢＣＤがあり、ＡＰ：ＰＢ＝ＡＱ：ＱＤ＝ＣＲ：ＲＤ＝ＣＳ：ＳＢ＝３：２です。三角すいＡＢＣＤを４点Ｐ、Ｑ、Ｒ、Ｓを通る平面で切断したとき、点Ｂを含む方の立体の体積は、三角すいＡＢＣＤの体積の何倍ですか。



ステップ４　切り口の作図②

12 図のような三角すいＡＢＣＤを３点Ｐ、Ｑ、Ｒを通る平面で切断するとき、切り口を次の手順で作図しなさい。



＜手順＞

① ＰとＱ、ＱとＲを結ぶ。＜同一平面上の２点を結ぶ＞

② ＱＰをＰの方に、ＤＢをＢの方に延長し、交点をＳとする。

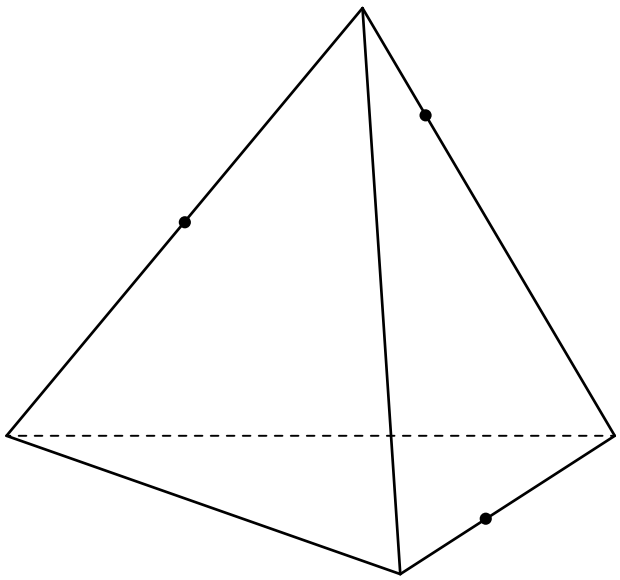
③ ＳとＲを結ぶ。＜同一平面上の２点を結ぶ＞

④ ＳＲと辺ＢＣの交点をＴとする。

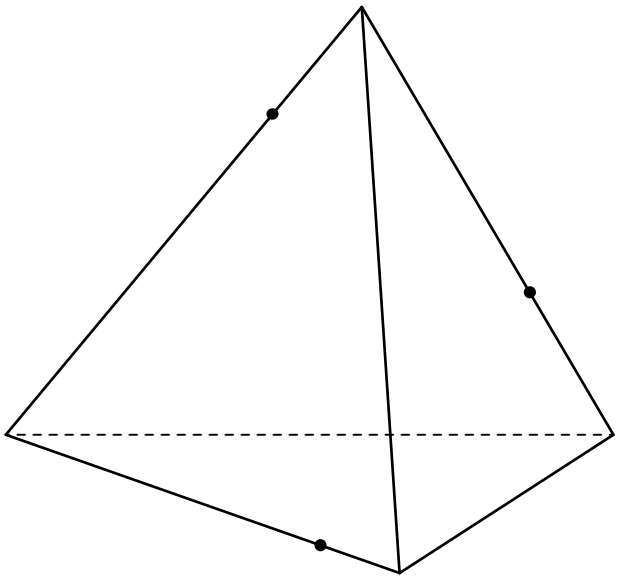
⑤ ＰとＴを結ぶ。＜同一平面上の２点を結ぶ＞

13 図のような三角すいを●を通る平面で切断するとき、切り口を作図しなさい。

(1)



(2)



ステップ5　【復習】相似形

14 次の問いに答えなさい。

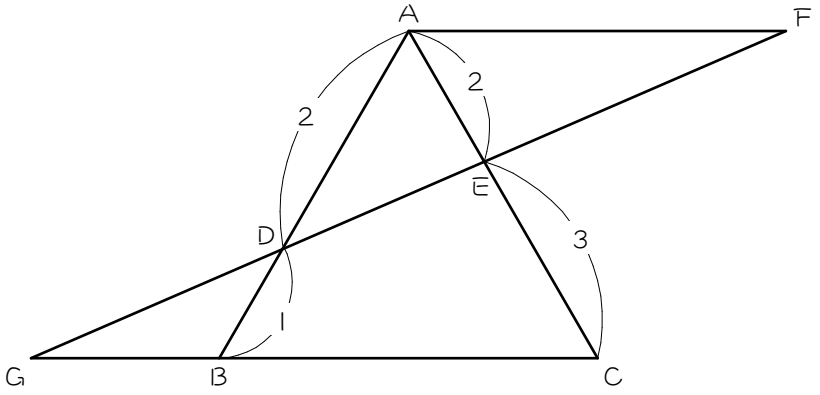
(1) 下の図において、ＡＤ：ＤＢ＝２：１、ＡＥ：ＥＣ＝２：３、ＡＦとＣＧが平行ののとき、次の比を求めなさい。

① ＡＦ：ＧＢ

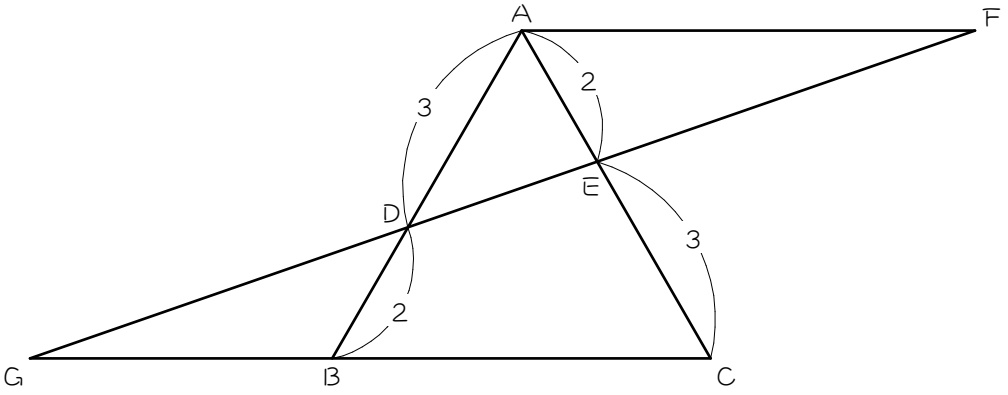
② ＡＦ：ＧＣ

③ ＡＦ：ＧＢ：ＧＣ

④ ＧＢ：ＢＣ



(2) 下の図において、ＡＤ：ＤＢ＝３：２、ＡＥ：ＥＣ＝２：３、ＡＦとＣＧが平行ののとき、ＧＢ：ＢＣを求めなさい。

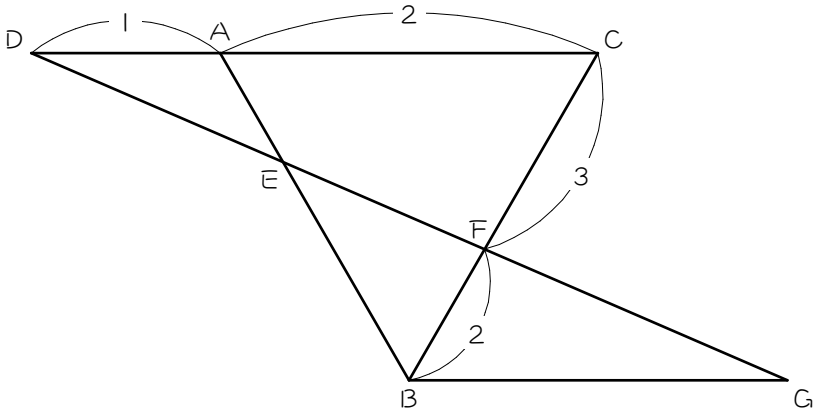


15 次の問いに答えなさい。

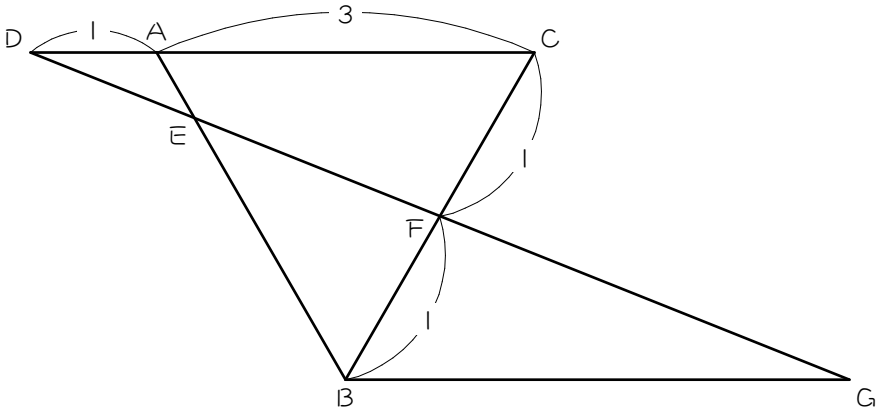
(1) 下の図において、ＤＡ：ＡＣ＝１：２、ＣＦ：ＦＢ＝３：２、ＤＣとＢＧが平行ののとき、次の比を求めなさい。

① ＤＣ：ＢＧ

② ＡＥ：ＥＢ

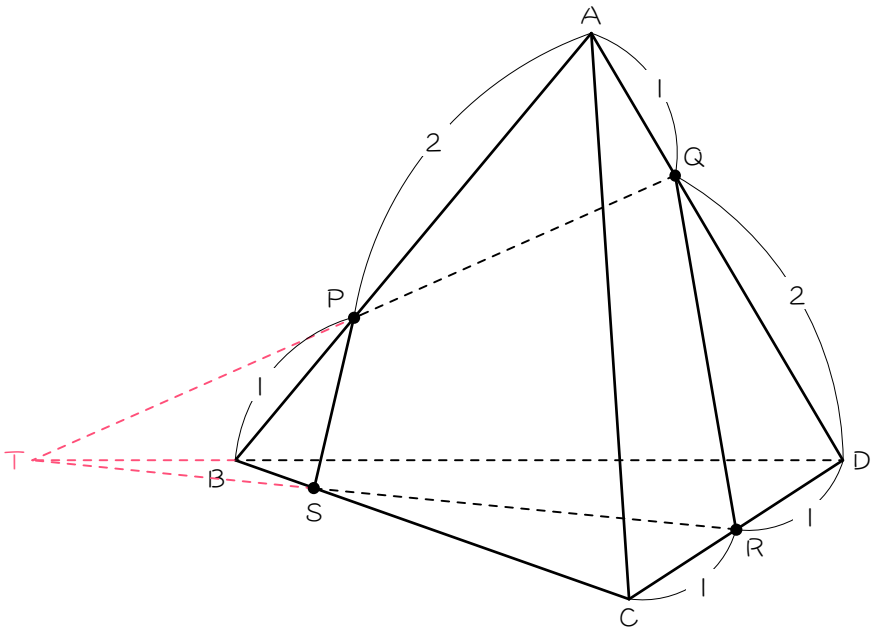


(2) 下の図において、ＤＡ：ＡＣ＝１：３、ＣＦ：ＦＢ＝１：１、ＤＣとＢＧが平行ののとき、ＡＥ：ＥＢを求めなさい。

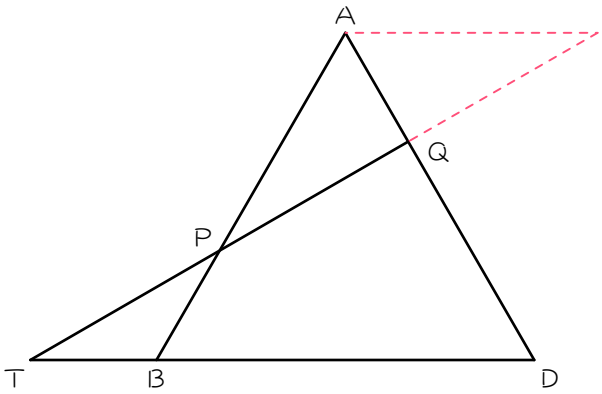


ステップ５　長さを求める

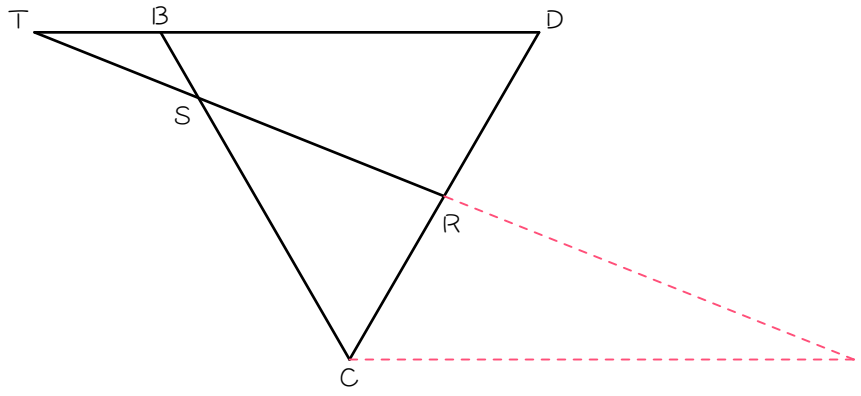
16 図のような三角すいＡＢＣＤがあり、ＡＰ：ＰＢ＝２：１、ＡＱ：ＱＤ＝１：２、ＣＲ：ＲＤ＝１：１です。三角すいＡＢＣＤを３点Ｐ、Ｑ、Ｒを通る平面で切断するとき、次の問いに答えなさい。



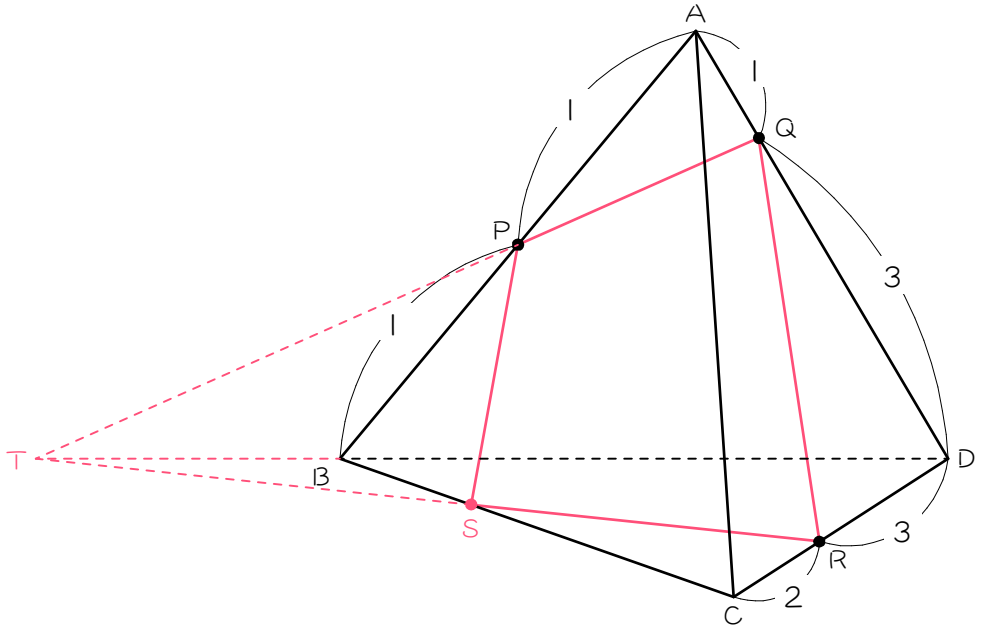
(1)　下の図を利用して、ＴＢ：ＢＤを求めなさい。



(2) (1)の結果と下の図を利用して、ＢＳ：ＳＣを求めなさい。



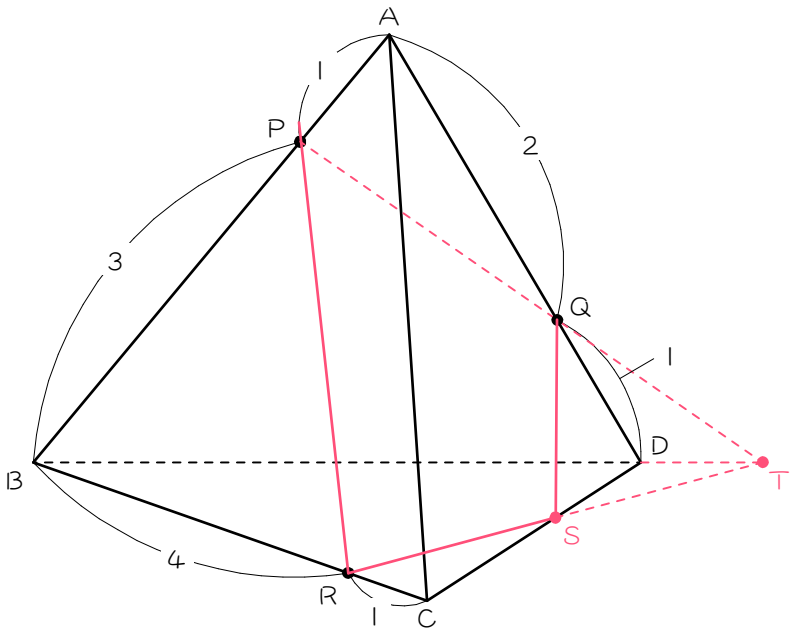
17 図のような三角すいＡＢＣＤがあり、ＡＰ：ＰＢ＝１：１、ＡＱ：ＱＤ＝１：３、ＣＲ：ＲＤ＝２：３です。三角すいＡＢＣＤを３点Ｐ、Ｑ、Ｒを通る平面で切断しました。このとき、次の比を求めなさい。



(1) ＴＢ：ＢＤ

(2) ＢＳ：ＳＣ

18 図のような三角すいＡＢＣＤがあり、ＡＰ：ＰＢ＝１：３、ＡＱ：ＱＤ＝２：１、ＢＲ：ＲＣ＝４：１です。三角すいＡＢＣＤを３点Ｐ、Ｑ、Ｒを通る平面で切断しました。このとき、次の比を求めなさい。

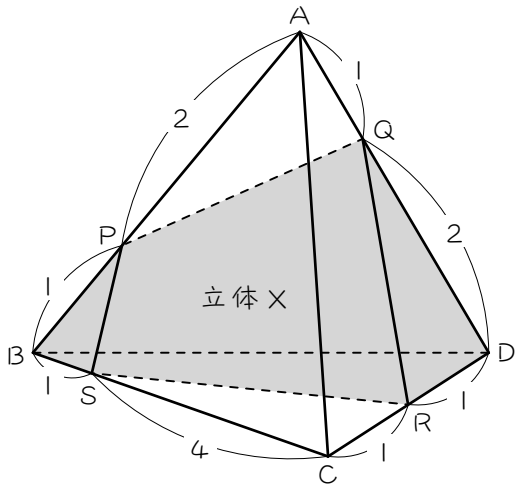


(1) ＢＤ：ＤＴ

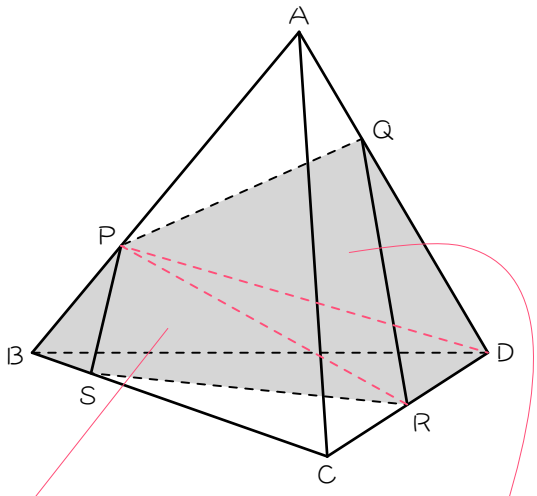
(2) ＣＳ：ＳＤ

ステップ７　体積を求める②

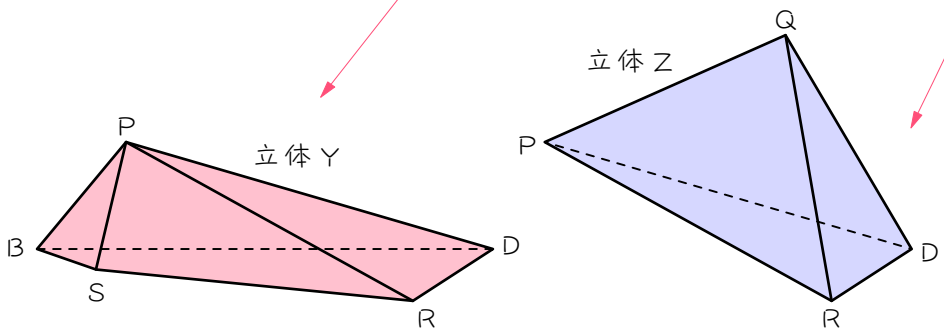
19 図１のような三角すいＡＢＣＤがあり、ＡＰ：ＰＢ＝２：１、ＡＱ：ＱＤ＝１：２、ＣＲ：ＲＤ＝１：１、ＢＳ：ＳＣ＝１：５です。三角すいＡＢＣＤを３点Ｐ、Ｑ、Ｒを通る平面で切断したとき、点Ｂを含む方の立体（色のついた部分の立体）を立体Ｘとします。立体Ｘの体積が、三角すいＡＢＣＤの体積の何倍かを求めようと思います。



【図１】

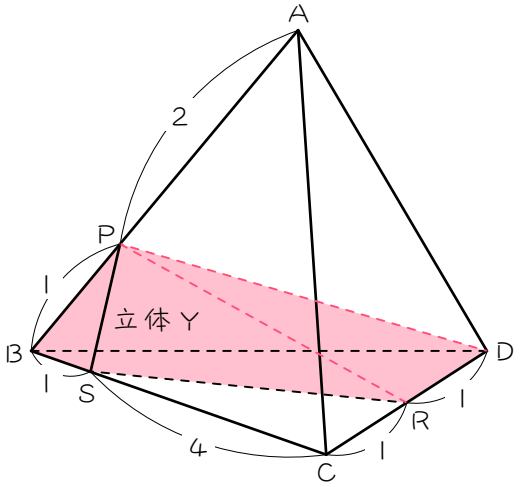


【図２】



【図３】

このままでは求められないので、図２、図３のように立体Ｘを３点Ｐ、Ｒ、Ｄを通る平面で切断し、２つの立体に分けます。このとき、Ｂを含む方の立体を立体Ｙ、Ｑを含む方の立体を立体Ｚとします。



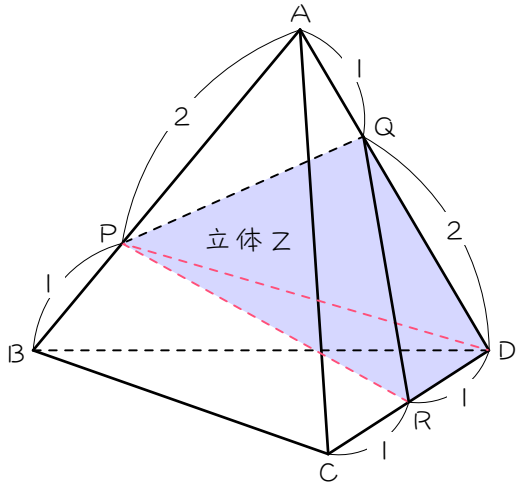
【図４】

(1)　立体Ｙについて考えます。

①　立体Ｙの底面を四角形ＢＳＲＤ、三角すいＡＢＣＤの底面を三角形ＡＢＣとすると、立体Ｙの底面積は三角すいＡＢＣＤの底面積の（　　）倍です。

②　①のとき、立体Ｙの高さは三角すいＡＢＣＤの高さの（　　）倍です。

③　①②より、立体Ｙの体積は三角すいＡＢＣＤの体積の（　　）倍です。



【図５】

(2)　立体Ｚについて考えます。

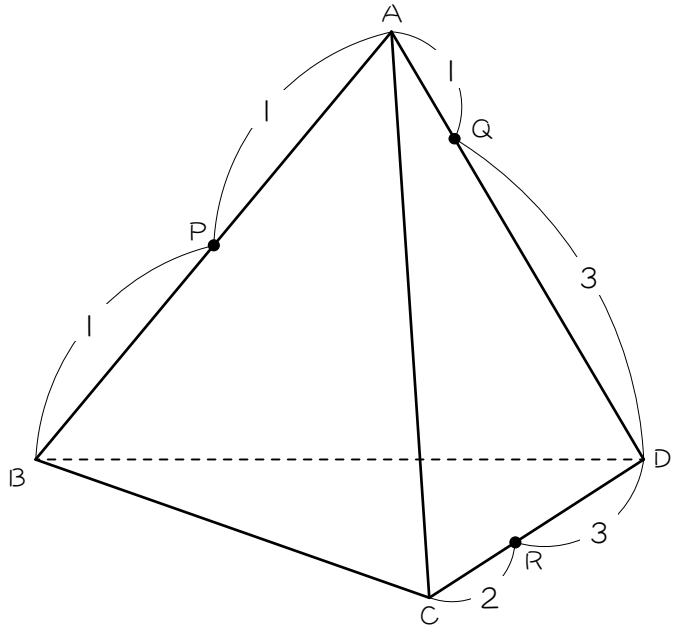
①　立体Ｚの底面を三角形ＱＲＤ、三角すいＡＢＣＤの底面を三角形ＡＣＤとすると、立体Ｚの底面積は三角すいＡＢＣＤの底面積の（　　）倍です。

②　①のとき、立体Ｚの高さは三角すいＡＢＣＤの高さの（　　）倍です。

③　①②より、立体Ｚの体積は三角すいＡＢＣＤの体積の（　　）倍です。

(3)　(1)(2)より、立体Ｘの体積は三角すいＡＢＣＤの体積の（　　）倍となります。

20　図のような三角すいＡＢＣＤがあり、ＡＰ：ＰＢ＝１：１、ＡＱ：ＱＤ＝１：３、ＣＲ：ＲＤ＝２：３です。三角すいＡＢＣＤを３点Ｐ、Ｑ、Ｒを通る平面で切断します。切り口と辺ＢＣの交点をＳとするとき、次の問いに答えなさい。



(1)　ＢＳ：ＳＣを求めなさい。

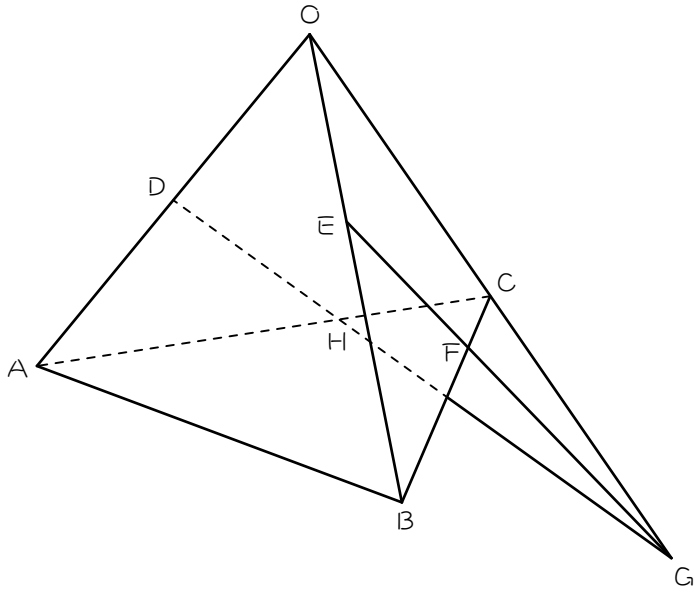
(2) 点Ｂを含む方の立体を立体Ｘとします。さらに、立体Ｘを３点Ｐ、Ｒ、Ｄを通る平面で切断し、２つの立体に分けます。このとき、Ｂを含む方の立体を立体Ｙ、Ｑを含む方の立体を立体Ｚとします。

① 立体Ｙの体積は三角すいＡＢＣＤの体積の何倍ですか。

② 立体Ｚの体積は三角すいＡＢＣＤの体積の何倍ですか。

③ 立体Ｘの体積は三角すいＡＢＣＤの体積の何倍ですか。

21 次の図のような三角すいＯＡＢＣにおいて、辺ＯＡのちょうど真ん中の点をＤ、辺ＯＢを２：３に分ける点をＥ、辺ＢＣを３：１に分ける点をＦとします。さらに直線ＥＦをＦの方にのばした直線とＯＣをＣの方にのばした直線が交わった点をＧとし、直線ＤＧと辺ＡＣが交わった点をＨとします。あとの問いに答えなさい



(1) ＯＣ：ＣＧを、最も簡単な整数の比で表しなさい。

(2) ＡＨ：ＨＣを、最も簡単な整数の比で表しなさい。

(3) （立体ＯＤＥＧの体積）：（立体ＯＨＦＣの体積）を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

■ 解答 ■

1 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) $\frac{1}{2}$

2 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{3}{7}$

(3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{1}{2}$

(5) $\frac{1}{4}$ (6) $\frac{3}{8}$

3 (1) $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$

(2) 1

(3) $\frac{1}{4}$

4 (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{2}{7}$

(3) $\frac{2}{9}$ (4) $\frac{9}{40}$

5 (1) $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$

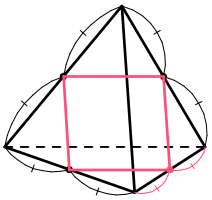
(2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{8}$

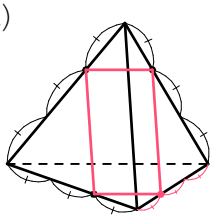
6 (1) $\frac{3}{25}$ (2) $\frac{4}{15}$

(3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{3}{20}$

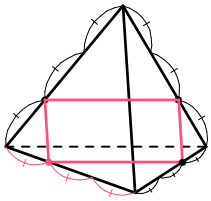
7 (1)



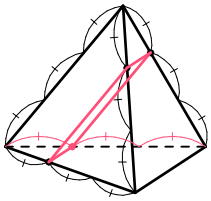
(2)



(3)



(4)



8 (1) $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{27}$

(2) ① 1、1

② 1、2

③ 1、1、1、2、3、1、6

④ $\frac{1}{27}$、6、$\frac{2}{9}$ $(\frac{6}{27})$

(3) $\frac{1}{27}$、$\frac{2}{9}$、$\frac{7}{27}$

9 (1) $\frac{1}{64}$ (2) $\frac{9}{64}$ (3) $\frac{5}{32}$

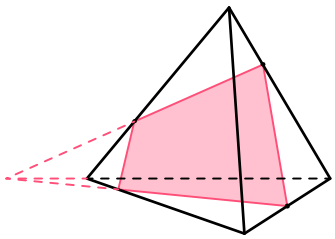
10 (1) 16、1

(2) 2、5

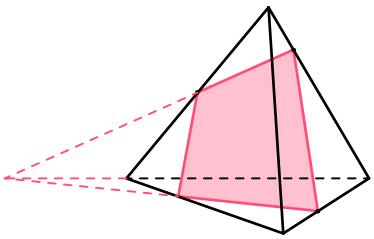
(3) 32、5、$\frac{5}{32}$

11 $\frac{44}{125}$倍

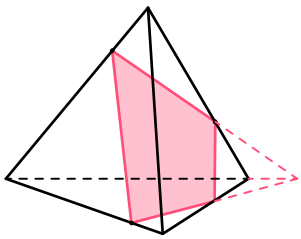
12



13 (1)



(2)



14 (1) ① 2 : 1
② 2 : 3
③ 2 : 1 : 3
④ 1 : 2
(2) 4 : 5

15 (1) ① 3 : 2
② 1 : 2
(2) 1 : 4

16 (1) 1 : 3
(2) 1 : 4

17 (1) 1 : 2
(2) 1 : 2

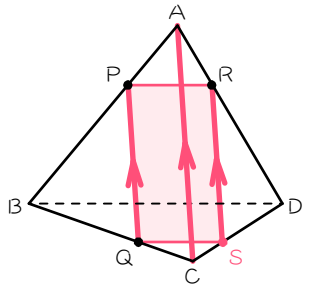
18 (1) 5 : 1
(2) 3 : 2

19 (1) ① $\frac{3}{5}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{5}$
(2) ① $\frac{1}{3}$
② $\frac{2}{3}$
③ $\frac{2}{9}$
(3) $\frac{19}{45}$

20 (1) 1 : 2
(2) ① $\frac{11}{30}$倍
② $\frac{9}{40}$倍
③ $\frac{71}{120}$倍

21 (1) 1 : 1
(2) 2 : 1
(3) 24 : 5

p.7 の証明です。２段階で証明します。



【命題】 ＰＱと辺ＡＣが平行のとき、
ＰＱは面ＡＣＤと平行である

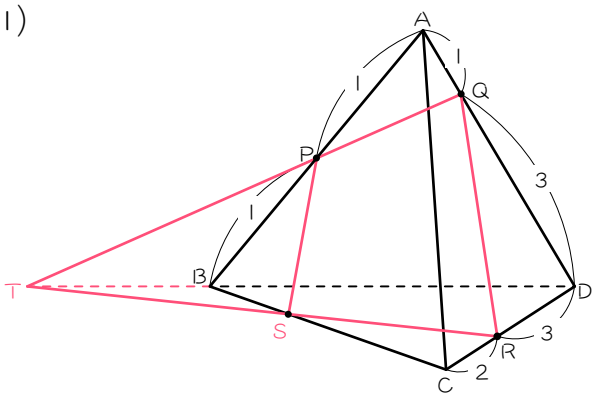
【証明】
ＰＱと面ＡＣＤが交わるとする。
ＰＱと面ＡＣＤの交点をＸとすると、
ＸはＰＱの延長線上にある…①
Ｘは面ＡＣＤ上にある…②
①より、
Ｘは面ＡＢＣ上にある…③
②と③より、
Ｘは面ＡＣＤと面ＡＢＣの交線ＡＣ上にある…④
④より、
ＰＱと辺ＡＣはＸで交わるから仮定に反する。よって、ＰＱと面ＡＣＤは平行。

【命題】 ＰＱと辺ＡＣが平行のとき、
ＰＱとＲＳは平行になる。

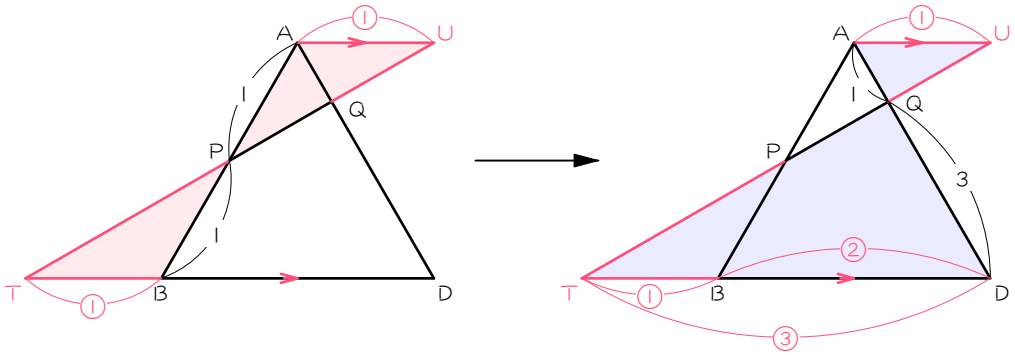
【証明】
ＰＱは面ＡＣＤと平行である…①
（延長しても交わらない）
ＰＱとＲＳは同一平面上にある…②
（面ＰＱＳＲ上にあります）
①より、
ＰＱとＲＳは交わらない…③
②と③より、
ＰＱとＲＳは同一平面上にあって交わらないから、平行。

■ 解説 ■

20 (1)

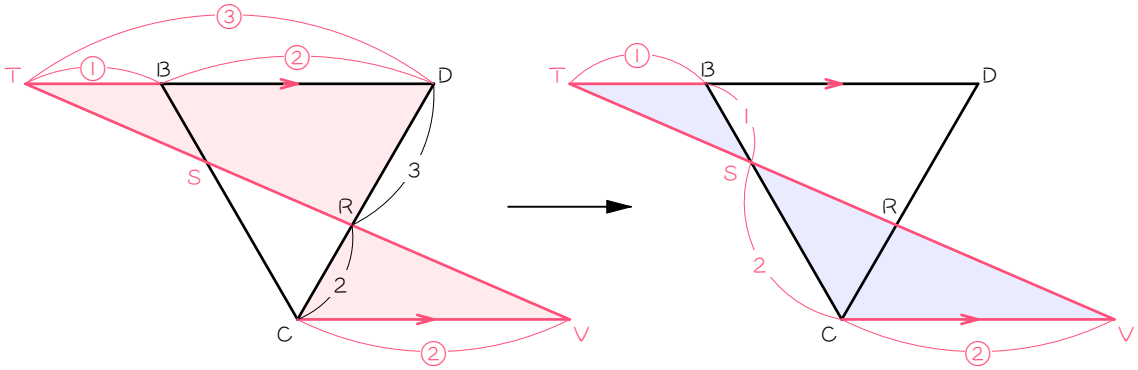


切り口はこのようになる。



まず、面ＡＢＣについて考える。
図の赤線のように補助線を引く。
赤いちょうちょ相似の
相似比は１：１
よって、ＡＵ＝ＴＢ＝①とすると、

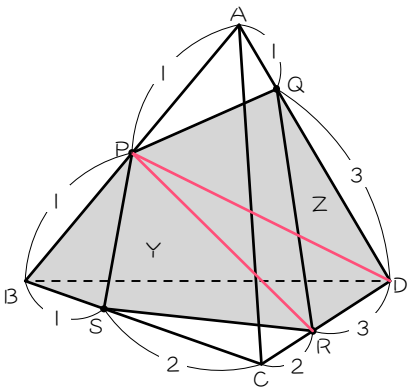
青いちょうちょ相似の
相似比は１：３
よって、ＴＤ＝①×３＝③
ＢＤ＝③－①＝②



次に、面ＢＣＤについて考える。
上図の赤線のように補助線を引く。
赤いちょうちょ相似の
相似比は３：２
よって、ＣＶ＝③×$\frac{2}{3}$＝②

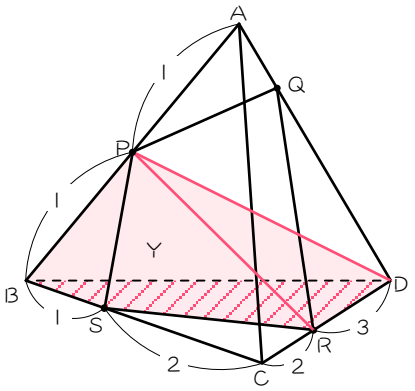
青いちょうちょ相似の
相似比は①：②＝１：２
よって、ＢＳ：ＳＣ＝<u>１：２</u>

(2)



図のようにＹとＺに分割。

①



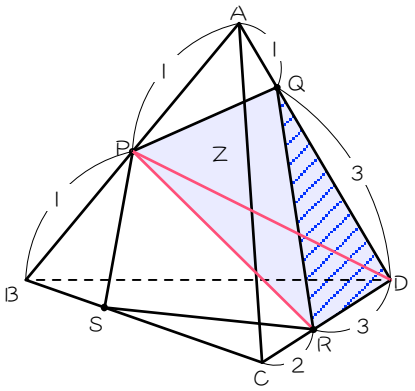
斜線部分をＹの底面と考えると、

Ｙの底面積は、全体の $1-\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{11}{15}$(倍)

Ｙの高さは、全体の $\frac{1}{2}$ 倍

よって、Ｙの体積は全体の、$\frac{11}{15}\times\frac{1}{2}=\underline{\frac{11}{30}}$(倍)

②



斜線部分をＺの底面と考えると、

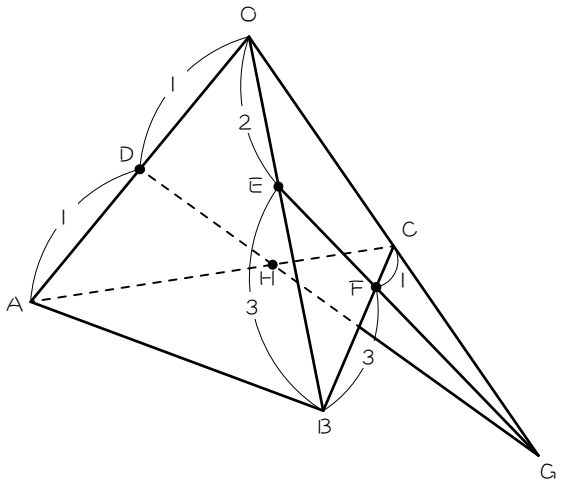
Ｚの底面積は、全体の $\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$(倍)

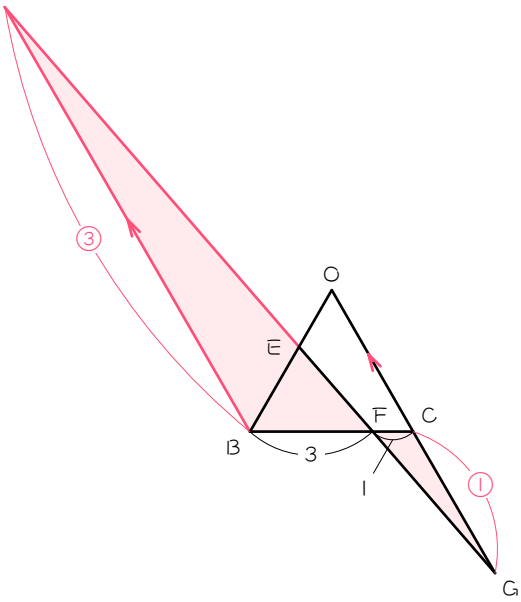
Ｚの高さは、全体の $\frac{1}{2}$ 倍

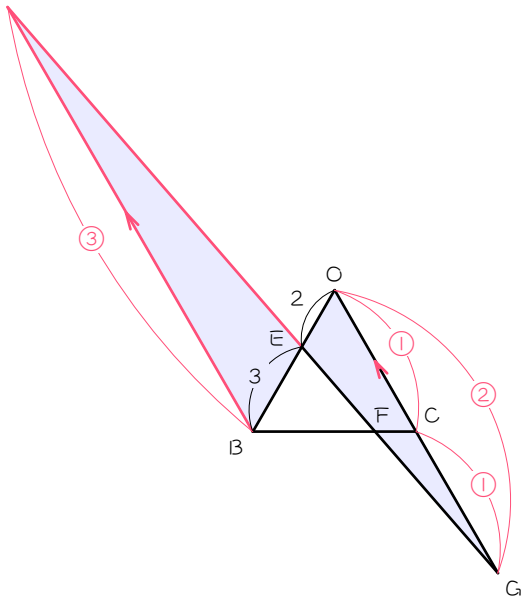
よって、Ｚの体積は全体の、$\frac{9}{20}\times\frac{1}{2}=\underline{\frac{9}{40}}$(倍)

③ $\frac{11}{30}+\frac{9}{40}=\underline{\frac{71}{120}}$(倍)

21 (1)



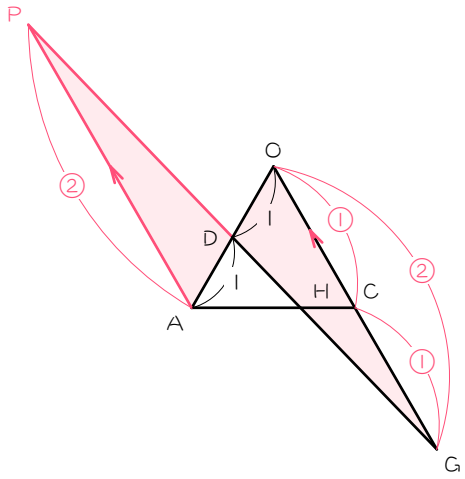


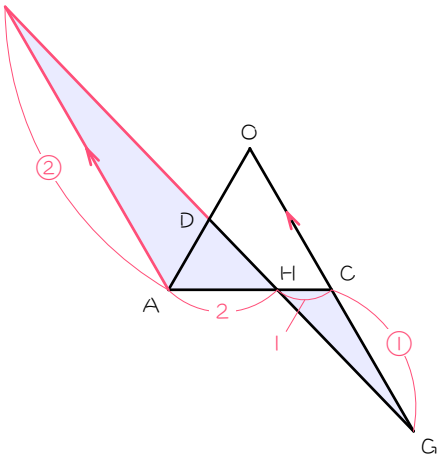


まず、面ＯＢＣについて考える。
図の赤線のように補助線を引く。
赤いちょうちょ相似の
相似比は３：１
よって、図のように③、①とおく

青いちょうちょ相似の
相似比は３：２
ＯＧ＝③×$\frac{2}{3}$＝②
ＯＣ＝②－①＝①
よって、ＯＣ：ＣＧ＝<u>１：１</u>

(2)

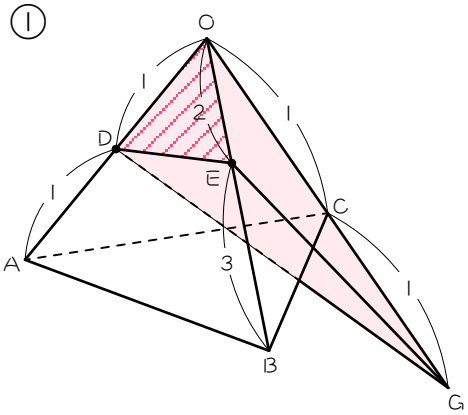




次に、面ＯＡＣについて考える。
上図の赤線のように補助線を引く。
赤いちょうちょ相似の
相似比は１：１
よって、ＰＡ＝③×$\frac{2}{3}$＝②

青いちょうちょ相似の
相似比は②：①＝２：１
よって、ＡＨ：ＨＣ＝<u>２：１</u>

(3) ①



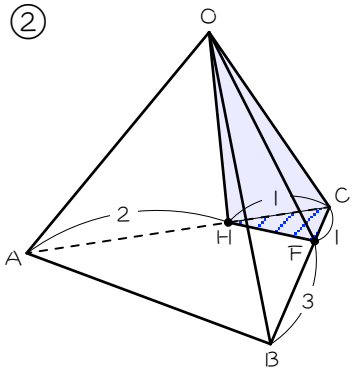
斜線部分を立体ODEGの底面と考えると、

立体ODEGの底面積は、全体の$\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$(倍)

立体ODEGの高さは、全体の２倍

よってODEGの体積は全体の$\frac{1}{5}\times 2=\underline{\frac{2}{5}}$(倍)

②



斜線部分を立体OHFCの底面と考えると、

立体OHFCの底面積は、全体の$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$(倍)

立体OHFCの高さは、全体の１倍

よって立体OHFCの体積は全体の$\frac{1}{12}\times 1=\underline{\frac{1}{12}}$(倍)

③ $\frac{2}{5}:\frac{1}{12}=\underline{24:5}$